Vocabulaire du raisonnement logique

1 Assertions et tables de vérité

1.1 Structure du cours de mathématiques

On dispose en mathématiques d'***axiomes*** : ce sont les règles de base du maniement des objets mathématiques. A partir des axiomes, on propose des ***assertions*** (ou ***propositions***) : ce terme désigne toute formulation mathématique. La ***valeur de vérité*** d'une assertion est "*vrai*" ou "*faux*" – mais pas les deux. Une assertion est dite vraie si elle est conforme aux axiomes. Deux assertions sont **équivalentes** ou **identiques** si elles ont les mêmes valeurs de vérité.

Exemple :
- $\pi > 3$ est une assertion vraie.
- $7 + 4 = 12$ est une assertion fausse.

Le but du cours de mathématiques est de proposer des assertions vraies, qui sont appelées, par ordre d'importance : ***théorèmes***, ***propositions***, ***propriétés***. La vérité de ces assertions est le résultat des axiomes et règles ou assertions déjà déduits des axiomes. La vérité de toute nouvelle assertion doit être démontrée !

Remarque :
- Dans le cours de mathématiques, les nouveaux objets ou qualificatifs sont introduits par des ***définitions***.
- Parfois, on formule aussi des ***lemmes*** : ce sont de petits résultats ou assertions intermédiaires, sur lesquels on s'appuie pour prouver des résultats plus importants (théorèmes ou propositions).

1.2 Connecteurs logiques

On appelle ***connecteur logique*** tout procédé permettant de définir une nouvelle assertion à partir d'une ou plusieurs assertions : par exemple "et", "ou", "si... alors". Les valeurs de vérité vraie (V) ou faux (F) définissant ces nouvelles assertions peuvent être représentées par un tableau appelé ***table de vérité***.

Dans la suite, on considère trois assertions P, Q et R.

1.2.1 Négation

Définition 1 *L'assertion "**non** P" est vraie seulement si P est fausse :*

P	non P
V	F
F	V

Proposition 2 *L'assertion "non(non P)" est équivalente à P.*

1.2.2 Conjonction et disjonction

Définition 3
- *L'assertion "P **et** Q" est vraie lorque P et Q sont vraies toutes les deux, et fausse sinon.*
- *L'assertion "P **ou** Q" est vraie si l'une au moins des assertions P ou Q est vraie, et fausse dans le seul cas où P et Q sont toutes les deux fausses.*

P	Q	P et Q	P ou Q
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

Attention ! En mathématiques, le "ou" est dit ***inclusif*** : il a la signification "l'un ou l'autre ou les deux". Par opposition, dans le langage courant, le "ou" est souvent ***exclusif*** ("l'un ou l'autre, mais pas les deux").

Proposition 4
- *L'assertion "non(P ou Q)" est équivalente à l'assertion "(non P) et (non Q)".*
- *L'assertion "non(P et Q)" est équivalente à l'assertion "(non P) ou (non Q)".*

Exemple : "$x > 3$ et $y < 2$" a pour négation "$x \leq 3$ ou $y \geq 2$".

Proposition 5
- *L'assertion "P et (Q ou R)" est équivalente à l'assertion "(P et Q) ou (P et R)".*
- *L'assertion "P ou (Q et R)" est équivalente à l'assertion "(P ou Q) et (P ou R)".*

1.2.3 Implication et équivalence

Définition 6
- *L'assertion "$P \Rightarrow Q$" se lit "P **implique** Q" ou "**Si** P **alors** Q". Elle est fausse dans le seul cas où P est vraie et Q est fausse. Elle est vraie dans tous les autres cas.*
- *L'assertion "$P \Leftrightarrow Q$" se lit "P **si et seulement si** Q" ou "P **et** Q **sont équivalentes**". Elle est vraie si P et Q ont les mêmes valeurs de vérité, fausse sinon.*

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	F	V	V

Attention ! Affirmer que "$P \Rightarrow Q$" est vraie ne signifie ni que P est vraie, ni que Q est vraie. Par exemple, il est vrai que "$3 > 4 \Rightarrow 2 < -1$" et pourtant, ni "$3 > 4$" ni "$2 < -1$" ne sont des assertions vraies. Précisément, "$P \Rightarrow Q$" est toujours vraie si P est fausse.

Remarque :
- On dit que Q est une ***condition nécessaire*** pour que P soit vraie si, lorsque P est vraie, Q l'est aussi forcément (nécessairement) − autrement dit si l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie.
- On dit que Q est une ***condition suffisante*** pour que P soit vraie s'il suffit que Q soit vraie pour que P le soit aussi − autrement dit si l'implication $Q \Rightarrow P$ est vraie.

Exemple : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On note P : "f est dérivable" et Q : "f est continue". Alors, P est une condition suffisante (mais non nécessaire) pour que Q soit vraie. Et Q est une condition nécessaire mais non suffisante pour que P soit vraie.

Proposition 7
- *L'assertion "$P \Leftrightarrow Q$" est équivalente à l'assertion "$(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$".*
- *L'assertion "$P \Rightarrow Q$" est équivalente à l'assertion "(non Q)$\Rightarrow$(non P)".*
- *L'assertion "non($P \Rightarrow Q$)" est équivalente à l'assertion "P et (non Q)".*

L'assertion "(non Q)$\Rightarrow$(non P)" est appelée la ***contraposée*** de l'assertion "$P \Rightarrow Q$". Elle est parfois plus facile à démontrer.

Exemple : Soit n un entier naturel. Pour montrer que

$$n^2 \text{ pair} \;\Rightarrow\; n \text{ pair},$$

il est plus facile de montrer la contraposée

$$n \text{ impair} \;\Rightarrow\; n^2 \text{ impair}.$$

Supposons en effet que n est un entier naturel impair. Par définition, il existe k tel que $n = 2k+1$. Alors, $n^2 = (2k+1)^2 = 2(2k^2+2k)+1$. Ainsi, $n^2 = 2k'+1$ avec $k' = 2k^2+2k$. Cela montre que n^2 est impair.

2 Quantificateurs

Le cours de mathématiques fait aussi appel à des ***quantificateurs***. Nous ne définirons pas ici cette notion de manière rigoureuse, mais nous considérerons qu'un quantificateur est un symbole. Les deux principaux sont :

- ***Quantificateur universel*** $\forall$: pour tout, quel que soit.
- ***Quantificateur existentiel*** $\exists$: il existe (au moins un...).

Ils permettent d'écrire de façon condensée certaines assertions (voir le cours de M1).

Exemple :

- L'assertion $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 3$ signifie que tous les entiers naturels vérifient la propriété "être supérieur à 3". Elle est bien évidemment fausse.
- L'assertion $\exists n \in \mathbb{N},\ n \geq 3$ signifie qu'il existe (au moins) un entier naturel n supérieur à 3. Elle est donc vraie.

Proposition 8 *On considère un ensemble E et $\mathcal{P}$ une propriété. On note $\mathcal{P}(x)$ le fait que l'élément x de E vérifie la propriété $\mathcal{P}$.*

- *L'assertion "$\forall x \in E,\ \mathcal{P}(x)$" a pour négation "$\exists x \in E$, (non $\mathcal{P}(x)$)".*
- *L'assertion "$\exists x \in E,\ \mathcal{P}(x)$" a pour négation "$\forall x \in E$, (non $\mathcal{P}(x)$)".*

Pour obtenir la négation d'une assertion comportant des quantificateurs, on remplace tous les $\forall$ par des $\exists$, tous les $\exists$ par des $\forall$, et la dernière assertion par sa négation.

Attention ! La position (ou ordre) des quantificateurs est cruciale pour le sens d'une assertion.

- **on ne peut pas** généralement, permuter un quantificateur existentiel $\exists$ et un quantificateur universel $\forall$. On obtient généralement deux assertions qui n'ont pas la même signification. Par exemple, considérons

$$\exists n \in \mathbb{N},\ \forall m \in \mathbb{N},\ m \leq n, \tag{1}$$

$$\forall m \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N},\ m \leq n, \tag{2}$$

  La proposition $\forall m \in \mathbb{N},\ m \leq n$ signifie que n est plus grand que tous les entiers. L'assertion (1) veut donc dire qu'il existe un entier plus grand que tous les autres. Ce qui est évidemment faux.
  La proposition $\exists n \in \mathbb{N},\ m \leq n$ veut dire qu'étant donné un entier p, on peut trouver un entier n supérieur à m. L'assertion (2) signifie donc que pour chaque entier on peut trouver un entier plus grand, ce qui est vrai.
- On peut toujours permuter les quantificateurs universels $\forall$ **ENTRE EUX** et les quantificateurs existentiels $\exists$ **ENTRE EUX**. Par exemple, les deux assertions suivantes sont équivalentes :

$$\forall x,\ \forall y,\ \mathcal{P}(x,y) \quad \text{et} \quad \forall y,\ \forall x,\ \mathcal{P}(x,y).$$

  Ces deux assertions ont aussi le même sens que :

$$\forall (x,y),\ \mathcal{P}(x,y).$$

  De la même façon, on a équivalence entre

$$\exists x,\ \exists y,\ \mathcal{P}(x,y) \quad \text{et} \quad \exists y,\ \exists x,\ \mathcal{P}(x,y).$$

  Ces deux assertions ont aussi le même sens que :

$$\exists (x,y),\ \mathcal{P}(x,y).$$

Enfin, un dernier symbole peut-être utilisé, c'est le **pseudo-quantificateur** $\exists!$ signifiant "il existe un unique".

Exemple : L'assertion $\exists! x \in \mathbb{R}_+,\ x^2 = 2$ est vraie (le réel x en question est $x = \sqrt{2}$).