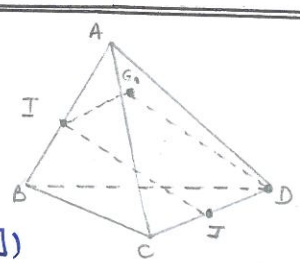
Exercice 3



Hypothèses : . ABCD tétraèdre, I milieu de [AB], J milieu de [CD].

. $G_m = \text{Bar}\begin{array}{c|c|c|c} A & B & C & D \\ \hline 1 & 1 & m-2 & m \end{array}$

1) • Par définition du barycentre, $\overrightarrow{G_1A} + \overrightarrow{G_1B} + \overrightarrow{G_1C} + \overrightarrow{G_1D} = \vec{0}$.
En introduisant le point I avec la relation de Chasles,
$2\overrightarrow{G_1I} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$. Or $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ (I milieu de [AB])
et $\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{CD}$
donc $-2\overrightarrow{IG_1} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$ c'est à dire $\boxed{\overrightarrow{IG_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}}$

• $\frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{JD}$ (car J milieu de [CD]) donc on obtient $\overrightarrow{IG_1} = \overrightarrow{JD}$ et donc $\boxed{IG_1DJ \text{ est un parallélogramme}}$.

2) Le barycentre d'une famille de points pondérés existe, si la somme des poids est non nulle, c'est ici, la somme vaut $1+1+m-2+m = 2m$.
G_m existe si $2m \neq 0$ c'est à dire si $m \in \mathbb{R}^*$ donc $\boxed{E = \mathbb{R}^*}$.

3) Pour montrer que G_m appartient au plan (ICD), on montre par exemple que $\overrightarrow{IG_m}$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{ID}$.
Par définition du barycentre, $\overrightarrow{G_mA} + \overrightarrow{G_mB} + (m-2)\overrightarrow{G_mC} + m\overrightarrow{G_mD} = \vec{0}$. Et on introduit à nouveau le point I :
$2m\overrightarrow{G_mI} + \underbrace{\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}}_{=\vec{0}} + (m-2)\overrightarrow{IC} + m\overrightarrow{ID} = \vec{0}$
donc $\overrightarrow{IG_m} = \frac{1}{2m}\left[(m-2)\overrightarrow{IC} + m\overrightarrow{ID}\right]$ donc $\boxed{G_m \in (IC}$

4) On part une nouvelle fois de la définition du barycentre
$\overrightarrow{G_mA} + \overrightarrow{G_mB} + (m-2)\overrightarrow{G_mC} + m\overrightarrow{G_mD} = \vec{0}$
et on introduit cette fois le point J :
$2m\overrightarrow{G_mJ} + \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB} + (m-2)\overrightarrow{JC} + m\overrightarrow{JD} = \vec{0}$.
donc $2m\overrightarrow{JG_m} = \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB} + m(\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JD}) - 2\overrightarrow{JC}$. Or $\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB} = 2\overrightarrow{JI}$
(I milieu de [AB] ... repartir de la définition $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$)
et $\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JD} = \vec{0}$
(J milieu de [CD])
donc $2m\overrightarrow{JG_m} = 2\overrightarrow{JI} - 2\overrightarrow{JC}$ c'est à dire $m\overrightarrow{JG_m} = \overrightarrow{JI} - \overrightarrow{JC} = -\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{CI}$
donc $\boxed{m\overrightarrow{JG_m} = \overrightarrow{CI} \text{ ne dépend pas de } m !}$

5) On a $m\overrightarrow{JG_m} = \overrightarrow{CI}$ par 4) et $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{JG_1}$ par 4) toujours, en prenant $m=1$.
donc $\overrightarrow{JG_m} = \frac{1}{m}\overrightarrow{JG_1}$ ($m \in E$ donc $m \neq 0$). Ainsi $G_m \in (JG_1)$ pour tout m : donc $\mathcal{F} \subset (JG_1)$
et quand m parcourt $E = \mathbb{R}^*$, G_m parcourt toute la droite (JG_1) sauf J. Donc $\boxed{\mathcal{F} = (JG_1) \setminus \{J\}}$ (droite (JG_1) privée de J)

Exercice 10

$\mathcal{D} : \begin{cases} x = 2z+1 \\ y = z-1 \end{cases}$ $\mathcal{D}' : \begin{cases} x = z+2 \\ y = 3z-3 \end{cases}$ ce sont des équations cartésiennes de droite !

1) On remarque que $\mathcal{D}$ admet pour paramétrisation $\begin{cases} x = 2t+1 \\ y = t-1 \\ z = t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$. Donc $\boxed{\mathcal{D} \text{ passe par } A\begin{vmatrix}1\\-1\\0\end{vmatrix} \text{ et est dirigé par } \vec{u}\begin{vmatrix}2\\1\\1\end{vmatrix}}$.
De même, $\mathcal{D}'$ passe par $\boxed{A'\begin{vmatrix}2\\-3\\0\end{vmatrix} \text{ et est dirigé par } \vec{u}'\begin{vmatrix}1\\3\\1\end{vmatrix}}$.

2) $A \in \mathcal{D}$, $A' \in \mathcal{D}'$ et $\overrightarrow{AA'}\begin{vmatrix}1\\-2\\0\end{vmatrix}$ donc $\boxed{\overrightarrow{AA'} = \vec{u} - \vec{u}'}$ donc $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont coplanaires (on a montré que A' appartenait au plan défini par $(A, \vec{u}, \vec{u}')$ ...)
Un vecteur normal au plan formé par les 2 droites est $\vec{u} \wedge \vec{u}' = \vec{n}\begin{vmatrix}-2\\-1\\5\end{vmatrix}$.
Donc un point $M\begin{vmatrix}x\\y\\z\end{vmatrix}$ appartient au plan si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = \vec{0}$, c'est à dire, si et seulement si
$-2(x-1) - (y+1) + 5z = 0$.
donc le plan admet pour équation $\boxed{-2x - y + 5z + 1 = 0}$.

Exercice 6

Équation d'inconnue le vecteur $\vec{x}$: $\vec{u} \wedge \vec{x} = \vec{v}$

1) Si $\vec{x}$ est une solution, alors $\vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{x}$. Donc, par définition du produit vectoriel, $\boxed{\vec{v} \perp \vec{u}}$ (et $\vec{v} \perp \vec{x}$).
On suppose $\vec{u} \perp \vec{v}$ dans la suite.

2) Soit $\vec{x_0}$ colinéaire à $\vec{u} \wedge \vec{v}$: il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tel que $\vec{x_0} = \lambda \vec{u} \wedge \vec{v}$. On va chercher le (les) λ possible(s)
Si $\vec{x_0}$ est solution de l'équation, alors $\vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{x_0} = \vec{u} \wedge (\lambda \vec{u} \wedge \vec{v}) = \lambda\, \vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v})$ par bilinéarité du produit vectoriel
$= \lambda\left[(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{u})\vec{v}\right]$ par l'exercice 5
$= \lambda\left[0 - \|\vec{u}\|^2 \vec{v}\right]$ car $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ ($\vec{u} \perp \vec{v}$)
$= -\lambda \|\vec{u}\|^2 \vec{v}$
d'où $\vec{v} = -\lambda \|\vec{u}\|^2 \vec{v}$ donc $-\lambda \|\vec{u}\|^2 = 1$, donc $\lambda = -\frac{1}{\|\vec{u}\|^2}$.
donc il existe une unique solution colinéaire à $\vec{u} \wedge \vec{v}$: c'est $\boxed{\vec{x_0} = -\frac{1}{\|\vec{u}\|^2}(\vec{u} \wedge \vec{v})}$

3) Soit $\vec{x}$ une autre solution de l'équation. Alors $\vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{x}$.
or $\vec{u} \wedge \vec{x_0} = \vec{v}$ car $\vec{x_0}$ est solution.
Ainsi $\vec{u} \wedge \vec{x_0} = \vec{u} \wedge \vec{x} \iff \vec{u} \wedge \vec{x_0} - \vec{u} \wedge \vec{x} = \vec{0} \iff \vec{u} \wedge (\vec{x_0} - \vec{x}) = \vec{0}$.
donc, par définition du produit vectoriel, $\vec{x_0} - \vec{x}$ est colinéaire à $\vec{u}$, donc $\boxed{\vec{x} = \vec{x_0} + \alpha\vec{u},\ \alpha \in \mathbb{R}}$

On a donc montré : Si $\vec{x}$ est solution, alors $\vec{x} = \vec{x_0} + \alpha\vec{u}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

• Réciproquement, si $\vec{x} = \vec{x_0} + \alpha\vec{u}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $\vec{u} \wedge \vec{x} = \vec{u} \wedge (\vec{x_0} + \alpha\vec{u})$
$= \vec{u} \wedge \vec{x_0} + \alpha\, \vec{u} \wedge \vec{u}$
$= \vec{v} + \vec{0}$ car $\vec{x_0}$ est solution et car $\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{u}$
$= \vec{v}$
donc $\vec{x}$ est solution.

Ainsi l'ensemble des solution est $\boxed{\{\vec{x_0} + \alpha\vec{u},\ \alpha \in \mathbb{R}\}}$.