FEUILLE DE T.D. 1 - Nombres Complexes[1]

Exercice 1 Les questions sont indépendantes.

1. Calculer la forme algébrique du nombre complexe $z = \frac{(1+i)^4}{(\sqrt{3}-i)^3}$.
2. Calculer $(1+i)^{14}$.
3. Trouver les entiers positifs n tels que $(1+i\sqrt{3})^n$ soit un réel positif.

Exercice 2 Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $|z-i| = |z+i|$ si et seulement si z est réel.

Exercice 3 Soient $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$ $(\theta, \theta' \in \mathbb{R},\ r, r' \in \mathbb{R}_+^*)$ deux nombres complexes non nuls, sous forme exponentielle. Démontrer l'équivalence suivante :

$$|z+z'| = |z-z'| \iff \theta' \equiv \theta + \frac{\pi}{2}[\pi].$$

Indication : on pourra développer les carrés des modules, et faire apparaître $\mathrm{Re}(z\bar{z'})$.

Exercice 4

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2+z+1=0$. On notera j la solution dont la partie imaginaire est positive. Donner son module, et sa forme exponentielle.
2. Montrer, sans utiliser la valeur de j, que $j^3 = 1$. En déduire que $\bar{j} = j^2$.
3. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, placé les points $A(1)$, $B(j)$ et $C(j^2)$. Quelle est la nature du triangle ABC ?
4. Calculer $j^{33} + j^{28} + j^{-4}$.
5. Montrer que si a, b, c et d sont des réels,
$$aj + b = cj + d \iff a = c \text{ et } b = d.$$
6. Déterminer a et b tels que $\frac{3j+1}{2j-1} = aj + b$.

Exercice 5 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3 + \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 + \frac{z+i}{z-i} + 1 = 0.$$

Exercice 6 On note $\omega = e^{2i\pi/5}$.

1. Montrer que ω est solution de l'équation $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$.
2. On pose $Z = \omega + \bar{\omega}$. Montrer que $Z^2 + Z - 1 = 0$.
3. En déduire la partie réelle de ω.
4. Proposer une construction à la règle et au compas du point d'affixe ω. En déduire une construction à la règle et au compas d'un pentagone régulier.

Exercice 7 *(Relations coefficients-racines)*

1. Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. On pose $S = z_1 + z_2$ et $P = z_1 z_2$. Montrer que z_1 et z_2 sont solutions de l'équation $z^2 - Sz + P = 0$.
2. Déterminer les complexes z_1 et z_2 tels que $z_1 + z_2 = 2 - i$, $z_1 z_2 = 8 - i$.
3. Montrer, sans les calculer, que les deux solutions z_1 et z_2 de l'équation $z^2 - z + 4 = 0$ vérifient $z_1^2 + z_2^2 - z_1 z_2 = -11$.

1. Enseignant responsable du CM : G. Chagny. Chargés de TD : G. Chagny, J. Lemoine, L. Loukitch.

Exercice 8 Donner la forme algébrique des solutions des deux équations suivantes

$$z^2 = 3 + 4i \qquad ; \qquad z^2 = 12 + 5i.$$

Exercice 9 Soit $x \in \mathbb{R}$. Les deux questions sont indépendantes.

1. Exprimer $\cos(5x)$ et $\sin(5x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$. En déduire l'expression $\tan(5x)$ en fonction de $\tan(x)$.
2. Démontrer les formules de trigonométrie $\cos(x) = 1 - 2\sin^2(x/2) = 2\cos^2(x/2) - 1$. En déduire la valeur de $\cos(\pi/12)$.

Exercice 10 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) = 1$.

Exercice 11
1. Soit $a \in [0; 2\pi]$. Donner la forme exponentielle du nombre complexe $z_0 = 1 + e^{ia}$.
2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Donner la partie réelle et la partie imaginaire de $z_1 = e^{ia} + e^{ib}$ et $z_2 = e^{ia} - e^{ib}$.

Exercice 12
1. Donner la forme exponentielle de $z = \sqrt{2} + 1 + i$.
2. Pour quelles valeurs de n a-t-on $\mathrm{Re}(z^n) = 0$?

Exercice 13 Soit x un réel non multiple de 2π.

1. Montrer que
$$\frac{e^{(n+1)ix} - 1}{e^{ix} - 1} = e^{\frac{inx}{2}} \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$
2. Calculer $\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}$.
3. Déduire des deux questions précédentes les valeurs de $\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ et $\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$.
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) = -1$.

Exercice 14 Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, on donne deux points distincts $A(z_A)$ et $B(z_B)$. On construit un carré $ABCD$ dans le sens direct. Quelle est l'affixe ω du centre du carré $ABCD$?

Exercice 15 Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, on considère un triangle ABC direct. On construit le point A' extérieur au triangle ABC et tel que le triangle $BA'C$ est équilatéral. On définit de même B' et C' extérieurs à ABC tels que $CB'A$ et $AC'B$ sont équilatéraux. On note a, b, c, a', b', c' les affixes respectives des points A, B, C, A', B', C'.

1. Montrer que $\frac{a'-c}{b-c} = -j^2$. En déduire que $a' = -jc - j^2 b$.
2. Soient X (resp. Y, Z) le centre de gravité du triangle $BA'C$ (resp. $CB'A$, $AC'B$), et x, y, z les affixes de ces points. Justifier que
$$x = \frac{1}{3}(b + a' + c).$$
3. Déduire des deux questions précédentes l'expression de x, y et z en fonction de a, b et c. Montrer que $(z - x) = -j^2(y - x)$.
4. Que peut-on en conclure pour le triangle XYZ ?

Exercice 16 Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = 0$, $z_B = 1$, $z_C = 1 + i$, et $z_D = i$. On place ensuite les points F et E, de telle sorte que les triangles BFC et ABE soient équilatéraux directs.

1. Calculer les affixes z_F et z_E des points E et F.
2. Montrer que $\frac{z_F - z_D}{z_E - z_D}$ appartient à $\mathbb{R}$.
3. Que peut-on dire des points D, E et F ?