Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45 rue des Saints-Pères 75006 Paris
2010-2011

Systèmes dynamiques - LICENCE L3

Feuille d'exercices n°2

Exercice 1 *(Rappels sur les courbes paramétrées)* Faire l'étude des courbes paramétrées suivantes :

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = 3t - t^3 \\ y(t) = 3t^2 \end{cases} \qquad \Gamma_C : \begin{cases} x(t) = \frac{C}{t^2} + \frac{3}{4}t^2 \\ y(t) = \frac{2C}{t} + \frac{1}{2}t^3 \end{cases}$$

Pour Γ_C, on discutera suivant les valeurs de la constante C.

Exercice 2 On considère des systèmes différentiels linéaires à coefficients constants $X' = AX$ en dimension 2 définis à partir des matrices A ci-dessous. Dans chacun des cas, résoudre les équations. Représenter les courbes intégrales, tout en caractérisant le nœud en 0 et le comportement asymptotique.

$$(a)\ A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, (b)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, (c)\ A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, (d)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$(e)\ A = \begin{pmatrix} -17 & 12 \\ -6 & 10 \end{pmatrix} (f)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, (g)\ A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, (h)\ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 Soit le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = ay(t) \\ y'(t) = \frac{1}{2}x(t) \end{cases}.$$

a) Déterminer les solutions générales en discutant suivant les valeurs de la constante a.
b) Tracer la solution vérifiant $x(0) = y(0) = 1$ dans les cas suivants : $a = 2$, $a = 0$, $a = -2$.

Exercice 4 *(extrait d'un examen d'une année passée)* Soit le système différentiel linéaire suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + 2y(t) \\ y'(t) = -2x(t) - 3y(t) \end{cases}.$$

a) Déterminer les solutions du système linéaire.
b) Tracer le graphe, dans la base canonique, de la solution du sytème telle que $(x(0), y(0)) = (1, 2)$ en indiquant par une flèche le sens des t croissants. Quel est le type de noeud ?
c) Trouver la solution générale du système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + 2y(t) + \sin(t) \\ y'(t) = -2x(t) - 3y(t) + t \end{cases}.$$

Exercice 5 Trouver l'expression des solutions du système différentiel :

$$X' = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 19 & 2 \\ -3 & 26 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} t^2e^{6t} \\ \cos(t)e^{5t} \end{pmatrix}.$$

Exercice 6 On considère l'équation différentielle :

$$y'' + 5y' + \frac{9}{4}y = 0.$$

a) Mettre cette équation sous la forme d'un système différentiel linéaire d'ordre 1.
b) Donner la forme des solutions de l'équation.
c) Préciser la solution pour la condition initiale $y(0) = 0$ et $y'(0) = -2$.

Exercice 7 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$\begin{array}{lll} (1) & y'' + 16y' + 64y = 0, & y(0) = 1 \quad y'(0) = 0 \\ (2) & y'' + y' + 7y = 0, & y(0) = 1 \quad y'(0) = 1 \\ (3) & y'' + y' - 6y = te^{3t}, & y(0) = 0 \quad y'(0) = 1 \end{array}$$

Exercice 8 Déterminer la forme générale de la solution des équations qui suivent :

$$\begin{array}{ll} (1) & y'' - 5y' + 4y = (t^2 + 1)\exp(3t), \\ (2) & y'' - 5y' + 4y = (t^2 - 8t + 16)\exp(t) \\ (3) & y'' + 2y' + y = (2t + 1)\exp(-t). \end{array}$$