Introduction aux systèmes dynamiques – LICENCE L3
DEVOIR MAISON 1 : CORRIGÉ

Note : Ne pas utiliser de faï¿½on abusive les symboles "$\Rightarrow$" et "$\Leftrightarrow$". Faites des phrases, inspirez vous du corrigï¿½ ci-dessous. Pour un DM il est nï¿½cessaire de soigner la prï¿½sentation !

EXERCICE 1

$$|t|y' + (t^2 - 1)y = t^3 \tag{1}$$

1. L'équation (1) est une équation du premier ordre, scalaire (de dimension 1), sous forme implicite (ou non résolue), linéaire, à coefficients non constants, et non homogène (avec second membre).
2. Résolvons d'abord l'équation pour $t < 0$. L'équation (1) devient alors $-ty' + (t^2 - 1)y = t^3$ et est équivalente à sa forme explicite,

$$y' = \frac{t^2 - 1}{t}y - t^2 \tag{2}$$

On commence par rï¿½soudre l'équation homogène associée :

$$y' = \frac{t^2 - 1}{t}y \tag{3}$$

• On remarque que $(]-\infty, 0[, y : t \mapsto 0)$ est solution de l'équation (3). Or, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz (on sait qu'il s'applique pour une telle équation : cf. cours) il existe une unique solution passant par 0 à l'abscisse $t = t_0$ quel que soit $t_0 \in]-\infty; 0[$. Donc aucune autre solution ne peut s'annuler au point $t = t_0$. Autrement dit, en dehors de $y \equiv 0$, aucune solution ne s'annule.
• On suppose maintenant que y ne s'annule pas, c'est-à dire que $y(t) \neq 0$ pour tout t. Dans ce cas, l'équation (3) équivaut à

$$\frac{y'}{y} = t - \frac{1}{t},$$

et, en intégrant, $\ln|y| = t^2/2 - \ln|t| + c$, où $c \in \mathbb{R}$, c'est à dire, $|y| = e^c e^{t^2/2}/|t|$. D'oï¿½ $y(t) = \lambda e^{t^2/2}/t$, où $\lambda \in \mathbb{R}^*$.
Ainsi, la solution générale de l'équation homogène (3) est $(]-\infty, 0[, y : t \mapsto \lambda e^{t^2/2}/t)$, oï¿½ $\lambda \in \mathbb{R}$.
On recherche ensuite une solution particulière de l'équation complète (2). En utilisant la méthode de variation de la constante, on cherche cette solution sous la forme $y_0(t) = \lambda(t)e^{t^2/2}/t$. En dérivant y_0, et en écrivant que y_0' vérifie (2), on en déduit que $\lambda'(t)e^{t^2/2} = -t^3$. Ainsi, λ est une primitive de $t \mapsto -t^3 e^{-t^2/2}$. Un telle primitive se calcule de la façon suivante : si $t_0, t \in \mathbb{R}$, alors on écrit

$$\int_{t_0}^{t} -s^3 e^{-s^2/2} ds \quad = \quad \int_{t_0}^{t} s^2 \times (-se^{-s^2/2}) ds = \int_{t_0}^{t} u(s)v'(s) ds,$$

et on intègre par parties en dérivant $u(s) = s^2$ et en intégrant $v'(s) = -se^{-s^2/2}$: on a $u'(s) = 2s$ et on choisit $v(s) = e^{-s^2/2}$, et donc

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t} -s^3 e^{-s^2/2} ds &= [u(s)v(s)]_{t_0}^{t} - \int_{t_0}^{t} u'(s)v(s) ds, \\
&= \left[s^2 e^{-s^2/2}\right]_{t_0}^{t} - 2\int_{t_0}^{t} se^{-s^2/2} ds, \\
&= t^2 e^{-t^2/2} - t_0^2 e^{-t_0^2/2} + 2\left[e^{-s^2/2}\right]_{t_0}^{t}, \\
&= t^2 e^{-t^2/2} - t_0^2 e^{-t_0^2/2} + 2e^{-t^2/2} - 2e^{-t_0^2/2} = (t^2 + 2)e^{t^2/2} + C(t_0),
\end{aligned}$$

où $C(t_0)$ est une constante dépendant de t_0. Comme on cherche une seule primitive de λ' (puisqu'on veut une seule solution particulière), on choisit par exemple $\lambda(t) = (t^2 + 2)e^{-t^2/2}$. Une solution particulière est donc $y_0(t) = \lambda(t)e^{t^2/2}/t = t + 2/t$.
La solution générale de l'équation (2) est la somme de la solution générale de l'équation homogène et d'une solution particulière. Il s'agit donc de

$$\left(]-\infty; 0[,\ y_1 : t \mapsto \frac{\lambda_1}{t}\exp\left(\frac{t^2}{2}\right) + t + \frac{2}{t}\right),\ \ \lambda_1 \in \mathbb{R}.$$

Résolvons ensuite l'équation pour $t > 0$. L'équation (1) devient alors $ty' + (t^2 - 1)y = t^3$ et est équivalente à sa forme explicite,

$$y' = -\frac{t^2 - 1}{t}y + t^2 \tag{4}$$

Comme ci-dessus, on résout d'abord l'équation homogène associée :

$$y' = -\frac{t^2 - 1}{t}y \tag{5}$$

Le même raisonnement entraine que la solution générale de (5) est $(]0;\infty[, y : t \mapsto \lambda t e^{-t^2/2})$, où $\lambda \in \mathbb{R}$. On recherche ensuite une solution particulière de (1) sur $]0;\infty[$. Soit on applique à nouveau la méthode de variation de la constante, soit on peut remarquer directement que $y_0(t) = t$ est solution de l'équation. La solution générale de l'équation (4) est donc

$$\left(]0;\infty[,\ y_2 : t \mapsto \lambda_2 t \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) + t\right),\quad \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Conclusion : les solutions de l'équation (1) sur les intervalles $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ sont

$$\boxed{\begin{array}{l} \left(]-\infty;0[,\ y_1 : t \mapsto \frac{\lambda_1}{t}\exp\left(\frac{t^2}{2}\right) + t + \frac{2}{t}\right),\quad \lambda_1 \in \mathbb{R}. \\ \left(]0;\infty[,\ y_2 : t \mapsto \lambda_2 t \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) + t\right),\quad \lambda_2 \in \mathbb{R}. \end{array}}$$

3. Rechercher les solutions sur $\mathbb{R}$ revient à étudier la possibilité de raccorder les solutions y_1 et y_2 en $t = 0$. On s'intéresse d'abord à la continuité : peut-on prolonger y_1 et y_2 de manière continue en 0 ? On constate immédiatement que

$$\forall \lambda_2 \in \mathbb{R},\ \lim_{t\to 0^+} y_2(t) = \lim_{t\to 0^+} \lambda_2 t \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) + t = 0.$$

Ensuite, on écrit,

$$y_1(t) = t + \frac{\lambda_1 e^{t^2/2} + 2}{t}.$$

ceci afin de calculer la limite de y_1 en 0 : si $\lambda_1 \neq -2$, on ne peut prolonger y_1 par continuité en 0 car,

$$\forall \lambda_1 \neq -2,\ \lim_{t\to 0^-} y_1(t) = \lim_{t\to 0^-} \frac{\lambda_1 + 2}{t} = \pm\infty,$$

(la valeur $+\infty$ ou $-\infty$ de la limite dépend de la position de λ_1 par rapport à la valeur -2).
Dans le cas où $\lambda_1 = -2$, on cherche la limite de y_1 en faisant un développement limité de $e^{t^2/2}$ au voisinage de 0 :

$$y_1(t) = t - 2\frac{(e^{t^2/2} - 1)}{t} \underset{t\to 0}{=} t - 2\frac{1 + t^2/2 + o(t^2) - 1}{t} = o(t).$$

Ainsi, $\lim_{t\to 0^-} y_1(t) = 0$. On définit donc, quel que soit $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ une fonction y_3 continue sur $\mathbb{R}$ par

$$y_3(t) = \begin{cases} -2\dfrac{(e^{t^2/2} - 1)}{t} + t & \text{si } t < 0, \\ 0 \text{ si } & t = 0, \\ \lambda_2 t e^{-t^2/2} + t & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

On étudie maintenant la dérivabilité en 0 de la fonction y_3. On calcule les limites des taux d'accroissement à droite et à gauche en 0. Pour $t < 0$,

$$\begin{aligned} \tau^-(t) &= \frac{y_3(t) - y_3(0)}{t - 0} = \frac{1}{t}\left(-2\frac{e^{t^2/2} - 1}{t} + t\right), \\ &\underset{t\to 0}{=} \frac{1}{t}\left(-2\frac{1 + t^2/2 + o(t^2) - 1}{t} + t\right) = \frac{1}{t}\left(o(t^2)\right) = o(t), \end{aligned}$$

et donc $\lim_{t\to 0^-} \tau^-(t) = 0$. Pour $t > 0$,

$$\tau^+(t) \quad = \quad \frac{y_3(t) - y_3(0)}{t-0} = \frac{\lambda_2 t e^{-t^2/2} + t - 0}{t} = \lambda_2 e^{-t^2/2} + 1,$$

et donc $\lim_{t\to 0^+} \tau^+(t) = \lambda_2 + 1$. Ainsi, la fonction y_3 est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée continue en 0 si et seulement si on choisit $\lambda_2 = -1$.

Conclusion : La seule solution de l'équation (1) définie sur $\mathbb{R}$ est la fonction y_3 définie par

$$\boxed{y_3(t) = \begin{cases} -2\dfrac{(e^{t^2/2} - 1)}{t} + t \quad \text{si } t < 0, \\ 0 \quad \text{si } t = 0, \\ -te^{-t^2/2} + t \quad \text{si } t > 0. \end{cases}}$$

EXERCICE 2

$$y' = y^2 - (2t-1)y + t^2 - t + 1 \tag{6}$$

1. L'équation (6) est une équation du premier ordre, scalaire (de dimension 1), non linéaire. C'est une équation de Riccati. Montrons que la fonction $y_0 : t \mapsto t$ est solution de cette équation : d'une part $y_0' \equiv 1$, d'autre part, quel que soit $t \in \mathbb{R}$,

$$y_0^2(t) - (2t-1)y_0(t) + t^2 - t + 1 = t^2 - (2t-1)t + t^2 - t + 1 = 1.$$

   Donc y_0 est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation.

2. Pour résoudre une équation de Riccati dont on connaï¿$\frac{1}{2}$t une solution particulière y_0, on commence par poser le changement de fonction inconnue $z = y - y_0$. Ici, on obtient donc $y = z + t$, puis $y' = z' + 1$. En substituant à y' cette expression dans l'équation (1), on obtient l'équation différentielle d'inconnue z,

$$z' = z^2 + z, \tag{7}$$

   qui est une équation de Bernoulli de paramètre 2.
   Pour la résoudre, on constate que la fonction identiquement nulle est solution sur $\mathbb{R}$, et d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, qui s'applique dans ce cadre (cf. cours), c'est la seule solution qui s'annule. On peut donc maintenant supposer $z(t) \neq 0$ quel que soit t, et poser le nouveau changement d'inconnue $v = z^{1-2} = 1/z$. Ainsi, $z' = -v'/v^2$, et dans l'équation (7) on obtient

$$v' = -v - 1 \tag{8}$$

   qui est une équation linéaire du premier ordre.
   On résout d'abord l'équation homogène associée, $v' = -v$: la solution génerale est $v(t) = \lambda e^{-t}$, pour $t \in \mathbb{R}$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Une solution particulière évidente est $v_0(t) = -1$. Par conséquent, la solution génerale de (8) est $(\mathbb{R}, v : t \mapsto \lambda e^{-t} - 1)$. Cependant, on cherchait les solutions de (8) qui ne s'annulaient pas, puisque $v = 1/z$. On remarque que l'on a

$$\begin{array}{l} \forall \lambda \leq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \lambda e^{-t} - 1 \neq 0, \\ \forall \lambda > 0, \quad \forall t \neq \ln(\lambda), \quad \lambda e^{-t} - 1 \neq 0. \end{array}$$

   Les solutions de l'équation (8) ne s'annulant pas sont données par :

$$\begin{array}{l} (\mathbb{R}, \quad v_1 : t \mapsto \lambda_1 e^{-t} - 1) \quad \lambda_1 \leq 0, \\ (]-\infty; \ln(\lambda_2)[, \quad v_2 : t \mapsto \lambda_2 e^{-t} - 1) \quad \lambda_2 > 0, \\ (]\ln(\lambda_3); +\infty[, \quad v_3 : t \mapsto \lambda_3 e^{-t} - 1) \quad \lambda_3 > 0. \end{array}$$

   Les solutions de l'équation (7) sont les fonctions $z_i = 1/v_i$, $i = 1, 2, 3$ avec les mêmes intervalles de définitions que ceux ci-dessus.

Conclusion : La solution génerale de notre équation de départ (6) est ainsi donnée par $y_i = z_i + y_0$, $i = 1, 2, 3$, c'est à dire par

$$\boxed{\begin{array}{l} \left(\mathbb{R},\ \ y_{1,\lambda_1} : t \mapsto \dfrac{1}{\lambda_1 e^{-t} - 1} + t\right) \quad \lambda_1 \leq 0, \\[2ex] \left(]-\infty; \ln(\lambda_2)[,\ \ y_{2,\lambda_2} : t \mapsto \dfrac{1}{\lambda_2 e^{-t} - 1} + t\right) \quad \lambda_2 > 0, \\[2ex] \left(]\ln(\lambda_3); +\infty[,\ \ y_{3,\lambda_3} : t \mapsto \dfrac{1}{\lambda_3 e^{-t} - 1} + t\right) \quad \lambda_3 > 0, \end{array}}$$

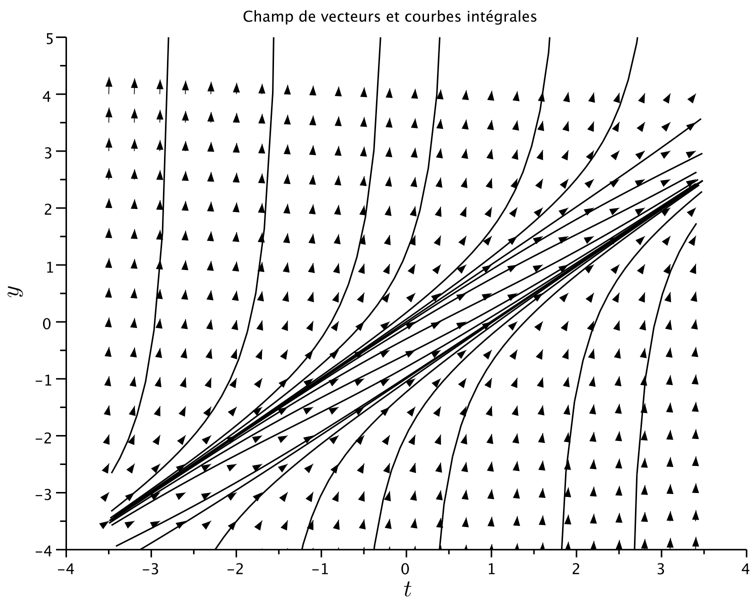
auxquelles on ajoute la solution polynomiale particulière

$$\boxed{(\mathbb{R}, y_0(t) = t)\,.}$$

3. On vï¿½rifie facilement les inï¿½galitï¿½s suivantes :

$$\begin{aligned} t - 1 < y_{1,\lambda_1} < t, &\quad \text{pour } t \in \mathbb{R} \text{ et } \lambda_1 < 0 \\ y_{2,\lambda_2} > t, &\quad \text{pour } t < \ln(\lambda_2) \text{ et } \lambda_2 > 0 \\ y_{3,\lambda_3} < t - 1, &\quad \text{pour } t > \ln(\lambda_3) \text{ et } \lambda_3 > 0 \end{aligned}$$

La figure suivante reprï¿½sente quelques courbes intégrales dans les trois régions obtenus ï¿½ partir du tracé des solutions polynomiales $y = t$ et $y = t - 1$ (solution y_{1,λ_1}, avec $\lambda_1 = 0$).



Pour obtenir de telles courbes, il faut faire au moins une ï¿½tude succincte des fonctions. On prï¿½sente dans la suite une ï¿½tude assez dï¿½taillï¿½e, mais facile ï¿½ faire lors d'un DM.
On va donc étudier les variations des fonctions du type

$$f : t \mapsto \frac{1}{\lambda e^{-t} - 1} + t,$$

où λ est un paramètre réel. La fonction f est dérivable sur son domaine de définition. On calcule la dérivée :

$$f'(t) = 1 + \frac{\lambda e^{-t}}{(\lambda e^{-t}-1)^2} = \frac{P(e^{-t})}{(\lambda e^{-t}-1)^2}, \text{ avec } P(X) = \lambda^2 X^2 - \lambda X + 1.$$

Comme le discriminant du trinôme P est négatif ($\Delta = -3\lambda^2$), on en déduit que f est croissante. On en déduit les variations des fonctions solutions, y_{i,λ_i}, $i = 1, \ldots, 3$, et on calcule aussi leurs limites. En résumé :

t	$-\infty$		$+\infty$
			$+\infty$
y_{1,λ_1}		$\nearrow$	
	$-\infty$		

t	$-\infty$		$\ln(\lambda_2)$	‖
			$+\infty$	‖
y_{2,λ_2}		$\nearrow$		‖
	$-\infty$			‖

t	‖	$\ln(\lambda_3)$		$+\infty$
	‖			$+\infty$
y_{3,λ_3}	‖		$\nearrow$	
	‖	$-\infty$		

La droite d'équation $x = \ln(\lambda_2)$ (respectivement $x = \ln(\lambda_3)$) est asymptote à la courbe représentative de y_{2,λ_2} en $\ln(\lambda_2)^-$ (respectivement de $y_{3,\ln(\lambda_3)}$ en $\ln(\lambda_3)^+$).
Il reste à étudier le comportement précis des fonctions en $+\infty$ et $-\infty$.

Rappel : pour chercher une éventuelle asymptote oblique à la courbe représentative d'une fonction f qui tend vers une limite infinie en ∞, on cherche $\lim_{t\to\infty} f(t)/t$. Si cette limite vaut $a \in \mathbb{R}^*$, on cherche ensuite $\lim_{t\to\infty} f(t) - at$. Si cette limite est encore finie et vaut b, alors on a donc $\lim_{t\to\infty} f(t) - (at+b) = 0$, ce qui signifie que la droite d'équation $y = at + b$ est asymptote à f en ∞.
Ici, on a d'abord immédiatement

$$\lim_{t\to-\infty} y_{1,\lambda_1}(t) - t = \lim_{t\to-\infty} \frac{1}{\lambda_1 e^{-t} - 1} = 0 \text{ si } \lambda_1 \neq 0$$

et donc la droite d'équation $y = t$ est asymptote en $-\infty$ à y_{1,λ_1} ($\lambda_1 \neq 0$).
Ensuite, comme on a

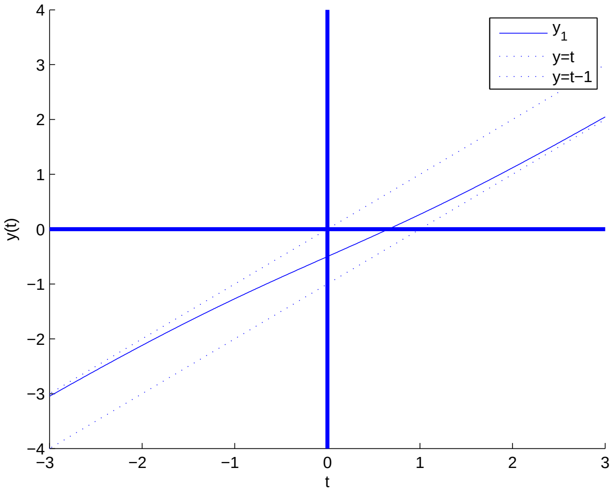
$$\lim_{t\to+\infty} \frac{y_{1,\lambda_1}(t)}{t} = \lim_{t\to+\infty} 1 + \frac{1}{t(\lambda_1 e^{-t} - 1)} = 1,$$

on calcule aussi

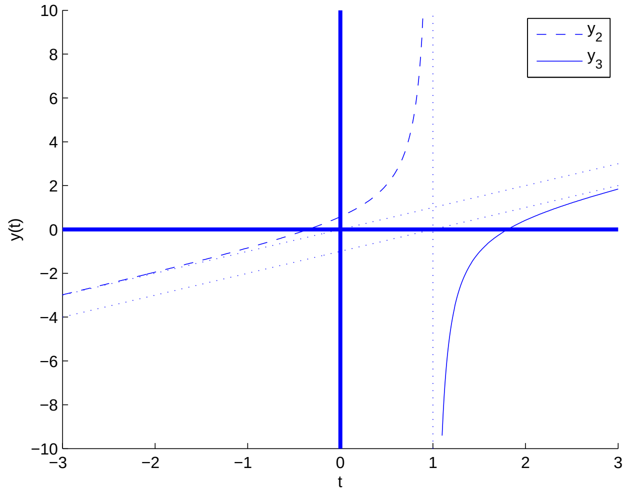
$$\lim_{t\to+\infty} y_{1,\lambda_1}(t) - 1 \times t = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{\lambda_1 e^{-t} - 1} = -1.$$

On a donc obtenu $\lim_{t\to+\infty} y_{1,\lambda_1}(t) - (t-1) = 0$ c'est-à-dire que la droite d'équation $y = t - 1$ est asymptote en $+\infty$ à y_{1,λ_1}.
De même, la droite $y = t - 1$ est asymptote à y_{2,λ_2} en $-\infty$ et celle d'équation $y = t$ est asymptote à y_{3,λ_3} en $+\infty$.

Représentation de y_{1,λ_1}***, avec*** $\lambda_1 = -1$



Représentation de y_{2,λ_2} ***et*** y_{3,λ_3}***, avec*** $\lambda_2 = \lambda_3 = e$



4. Pour chaque indice $i = 1, 2$ ou 3, on note $\mathcal{C}_{i,\lambda_i}$ la courbe représentative de la solution y_{i,λ_i}.
Prenons déjà $i = 1$. Montrons que la courbe $\mathcal{C}_{1,\lambda_1}$, pour un $\lambda_1 \leq 0$ est l'image de la courbe $\mathcal{C}_{1,-1}$ par une translation dont on note (a, b) le vecteur et qu'on va déterminer.
Si $M(t, y)$ appartient à la courbe image de $\mathcal{C}_{1,-1}$ par la translation de vecteur (a, b) alors, le point $N(t-a, y-b)$ appartient à $\mathcal{C}_{1,-1}$, c'est à dire que les coordonnées de N vérifient l'équation de la courbe. Ceci s'écrit encore $y_{1,-1}(t-a) = y-b$, et donc
$$y - b = \frac{1}{-e^{-(t-a)} - 1} + t - a,$$
ou encore
$$y = \frac{1}{-e^{a}e^{-t} - 1} + t - a + b.$$
Donc le point $M(t, y)$ appartient à la courbe $\mathcal{C}_{1,\lambda_1}$ pour $\lambda_1 = -e^a$, à condition aussi que $-a + b = 0$. Cela donne donc $a = \ln(-\lambda_1) = b$.
Conclusion : La courbe $\mathcal{C}_{1,\lambda_1}$ est la translatée de la courbe $\mathcal{C}_{1,-1}$ par la translation de vecteur $(\ln(-\lambda_1), \ln(-\lambda_1))$, pour $\lambda_1 \leq 0$.
Le même raisonnement avec $i = 2$ ou $i = 3$ prouve que la courbe $\mathcal{C}_{2,\lambda_2}$ est la translatée de la courbe $\mathcal{C}_{2,1}$ par la translation de vecteur $(\ln(\lambda_2), \ln(\lambda_2))$, et que la courbe $\mathcal{C}_{3,\lambda_3}$ est la translatée de la courbe $\mathcal{C}_{3,1}$ par la translation de vecteur $(\ln(\lambda_3), \ln(\lambda_3))$ pour $\lambda_2, \lambda_3 > 0$.