Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45 rue des Saints-Pères 75006 Paris
2011-2012 **LICENCE L3**

Probabilités 5

Feuille d'exercices n°5 : Convergences des variables aléatoires

Exercice 1 *(Examen 2010)* Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables indépendantes, équidistribuées telle que X_1 suit la loi exponentielle de paramètre $\alpha > 0$. On note $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Justifier la convergence presque sûre de S_n/n vers $1/\alpha$.
2. Justifier le résultat suivant :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{n}{\alpha} \leq S_n \leq \frac{n+\sqrt{n}}{\alpha}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx.$$

Exercice 2 *(Examen 2009)* Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ ($\sigma > 0$). On pose, pour tout entier $n \geq 1$,

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n, \quad Z_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}\left(S_1 + \cdots + S_n\right).$$

1. Quelle est la loi de S_n ?
2. Etudier la convergence presque sûre de la suite $(S_n/n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$.
3. Calculer la fonction caractéristique de la variable aléatoire Z_n.
4. En déduire la convergence en loi de la suite de terme général Z_n vers la loi $\mathcal{N}(0,\sigma^2/3)$.

Exercice 3 Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur l'intervalle $[0;\theta]$, où $\theta > 0$. On pose $\theta_n = \max_{1\leq i\leq n} U_i$, pour tout $n \geq 1$.

1. Calculer la fonction de répartition de θ_n.
2. Montrer que $(\theta_n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement, et déterminer sa limite. *Indication :* On pourra calculer $\mathbb{P}(|\theta_n - \theta| > \varepsilon)$, pour $\varepsilon > 0$.
3. Etudier la convergence en loi de la suite de terme général $n(\theta - \theta_n)$, $n \geq 1$.

Exercice 4 Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur l'intervalle $[0;1]$. Soit $\alpha > 0$. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$X_n = (U_1 \ldots U_n)^{\alpha/n}, \quad Y_n = (X_n e^{\alpha})^{\sqrt{n}}.$$

1. Montrer que la suite (X_n) converge presque sûrement vers une limite que l'on déterminera.
2. Montrer que (Y_n) converge en loi vers une variable admettant une densité que l'on calculera.

Exercice 5 Pour le second tour de l'élection présidentielle française, deux candidats sont en lice. Une proportion p de la population vote pour le candidat 1. En particulier, une personne tirée au hasard dans la population votera pour le candidat 1 avec une probabilité de p. On effectue un sondage sur 1000 personnes choisies de façon indépendante. On note S_n le nombre de personnes votant pour le candidat 1. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}S_n - p\right| \leq 1.96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right) = 95\%.$$

(on rappelle que si X suit une loi $\mathcal{N}(0,1)$, $\mathbb{P}(|X| \leq 1.96) \simeq 95\%$.) Avec quelle précision estime-t-on p si on effectue le sondage sur 1000 personnes ?