Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45 rue des Saints-Pères 75006 Paris
2011-2012 **LICENCE L3**

Probabilités 5

Feuille d'exercices n°4 : Vecteurs gaussiens

Exercice 1 Soit $U = {}^t(X, Y, Z)$ un vecteur gaussien centré de matrice de covariance $K = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les lois marginales du vecteur U.
2. Déterminer la fonction caractéristique du vecteur U.
3. Déterminer une densité du vecteur U, si elle existe.
4. Montrer que X et Z sont deux variables aléatoires indépendantes.
5. Déterminer la loi de la variable aléatoire $S = aX + bY + cZ$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 *(Examen janvier 2011)* Soit $X = {}^t(X_1, X_2)$ un vecteur aléatoire gaussien centré de dimension 2 et de matrice de covariance :

$$K = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les lois des variables X_1 et X_2.
2. La loi de X admet-elle une densité ? Si oui, la calculer.
3. Soit a un réel. On définit le vecteur $Y = {}^t(Y_1, Y_2)$ de dimension 2 par

$$\begin{cases} Y_1 = X_1, \\ Y_2 = aX_1 + 2X_2. \end{cases}$$

   (a) Quelle est la loi de Y ? Admet-elle une densité ?
   (b) Les variables Y_1 et Y_2 sont-elles indépendantes ?

Exercice 3 *(Examen janvier 2007)* Soit $X = {}^t(X_1, X_2, X_3)$ un vecteur gaussien centré de matrice de covariance $V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les lois des variables aléatoires réelles X_1, X_2 et X_3 ainsi que celles des couples (X_1, X_2), (X_2, X_3) et (X_1, X_3).
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On définit le vecteur $Y = {}^t(Y_1, Y_2, Y_3)$ par $Y_1 = X_1 + X_3$, $Y_2 = \alpha X_1 + 2X_2$ et $Y_3 = -X_2 + X_3$.
   (a) Les variables Y_1 et Y_2 sont-elles indépendantes ?
   (b) A quelle condition sur α, les variables Y_2 et Y_3 sont-elles indépendantes ?
   (c) Déterminer la loi du couple (Y_1, Y_3). Cette loi possède-t-elle une densité sur $\mathbb{R}^2$? Si oui la calculer.

Exercice 4 Soit X une variable aléatoire valeurs dans $\mathbb{R}^3$, suivant une loi $\mathcal{N}(0, I_3)$. On définit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

1. Déterminer la loi du vecteur $Y = AX$.
2. Y admet-il une densité ?
3. Montrer que les variables $U = X_1 + X_2 + X_3$ et $V = (X_2 - X_1)^2 + (X_3 - X_2)^2 + (X_3 - X_1)^2$ sont indépendantes.
4. Si P est une matrice orthogonale de taille 3, quelle est la loi de PX ?

Exercice 5 Soit $\rho > 1$. Montrer que le vecteur aléatoire (X_1, X_2) de densité f définie par

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\rho^2 - 1}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(\rho x_1^2 - 2x_1x_2 + \rho x_2^2)}{\rho^2 - 1}\right)$$

est gaussien.

Exercice 6 Soit $X = {}^t(Z, X_1, X_2, ..., X_n)$ un vecteur aléatoire gaussien tel que :
- $\mathbb{E}(Z) = 0, \qquad \mathrm{Var}(Z) = 1$
- $\forall\, i, \quad 1 \leq i \leq n, \quad \mathbb{E}(X_i) = 0, \qquad \mathrm{Var}(X_i) = 1, \qquad \mathrm{Cov}(Z, X_i) = \theta$
- $\forall\, (i, j), \quad 1 \leq i < j \leq n, \qquad \mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \theta^2$

  où θ est un nombre réel strictement compris entre -1 et 1.

On pose $Y_i = \dfrac{X_i - \theta Z}{\sqrt{1 - \theta^2}}$.

1. Quelle est la loi de Y_i $(1 \leq i \leq n)$?
2. Donner la matrice de covariance du vecteur aléatoire $Y = (Z, Y_1, Y_2, ..., Y_n)$.
3. Quelle est la loi de Y ? Montrer que cette loi admet une densité. Donner cette densité. En déduire que la loi de X admet une densité que l'on donnera.

Exercice 7 Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles telles que :
- $X_0 = 0$.
- $\forall\, n > 0 \quad X_n$ suit une loi normale centrée.
- $\forall\, (n, m, p), \quad 0 \leq p \leq m \leq n$, les variables $X_n - X_m$ et X_p sont indépendantes.
- $E\left[(X_n - X_m)^2\right] = n - m$ si $n > m \geq 0$.

1. Quelle est la fonction caractéristique de $X_n - X_m$ pour $n > m > 0$? En déduire sa densité de probabilité.
2. Donner la fonction caractéristique du couple $(X_m, X_n - X_m)$ pour $n > m > 0$. En déduire la fonction caractéristique et la densité de probabilité du couple (X_m, X_n) pour $n > m > 0$.