

Probabilités 5

Feuille d'exercices n°3 : Fonctions caractéristiques

Exercice 1 (*Fonctions caractéristiques de quelques lois continues usuelles*) Calculer la fonction caractéristique de la variable aléatoire X dans les cas suivants, et retrouver l'espérance de X , si elle existe.

1. X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[-a; a]$, avec $a > 0$.
2. X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
3. X suit une loi de Laplace de paramètres $(1, \lambda)$, aussi appelée loi exponentielle symétrique, et dont une densité est $f : x \mapsto \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}$, avec $\lambda > 0$.

Exercice 2 (*Loi symétrique et parité de la fonction caractéristique*) Soit X une variable aléatoire réelle et Φ_X sa fonction caractéristique.

1. Montrer que Φ_X est paire si et seulement si elle est réelle.
2. Montrer que Φ_X est paire si et seulement si X est symétrique ($X \stackrel{\text{loi}}{=} -X$). Dans ce cas montrer que $\Phi_X(t) = \mathbb{E}(\cos(tX))$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
3. Les fonctions suivantes peuvent-elles être des fonctions caractéristiques de variables réelles ? Si oui déterminer la loi de la variable associée : $t \mapsto e^{i|t|}$ et $t \mapsto a \cos(t) + b \sin(t)$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 (*Fonction caractéristique de la somme de deux v.a. indépendantes et premières applications*)

1. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes, définies sur un même espace de probabilité et dont les fonctions caractéristiques sont respectivement Φ_X et Φ_Y .
 Montrer que la fonction caractéristique Φ_{X+Y} de $X + Y$ est telle que, pour tout t réel,

$$\Phi_{X+Y}(t) = \Phi_X(t)\Phi_Y(t).$$

2. Déterminer la loi de la somme de deux variables aléatoires indépendantes X et Y suivant des lois normale $\mathcal{N}(0, \alpha^2)$ et $\mathcal{N}(0, \beta^2)$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On rappelle que la fonction caractéristique de X est donnée par $\Phi_X(t) = e^{-\alpha^2 t^2/2}$, $t \in \mathbb{R}$.
3. (*Extrait du Partiel 2010*) Soient $X_1, \dots, X_n$ ($n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) des variables aléatoires réelles indépendantes telles que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, X_i suit une loi exponentielle de paramètre λ_i ($\lambda_i > 0$).
 (a) Quelle est la loi du vecteur aléatoire $(X_1, \dots, X_n)$?
 (b) Soit $S = X_1 + \dots + X_n$. Calculer la fonction caractéristique de la variable S .

Exercice 4 (*Loi de Cauchy*) Soit X une variable réelle de loi $\mathcal{C}(a)$ ($a > 0$), loi de Cauchy de paramètre a , c'est à dire de densité

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_X(x) = \frac{a}{\pi(a^2 + x^2)}.$$

1. Déterminer la fonction caractéristique de la variable X . On pourra utiliser la question 3. de l'exercice 1 et la formule d'inversion de Fourier : si Φ_Y , la fonction caractéristique d'une variable Y de densité f_Y , est intégrable, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f_Y(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \Phi_Y(t) dt$.
2. Soit Y variable indépendante de X de loi $\mathcal{C}(b)$ ($b > 0$). Montrer que $X + Y$ suit la loi $\mathcal{C}(a + b)$.
3. Soit $\alpha > 0$. Quelle est la loi de αX ?
4. On suppose maintenant que X et Y sont des variables réelles telles que la fonction caractéristique de $X + Y$ est égale au produit des fonctions caractéristiques de X et de Y . Peut-on dire que X et Y sont indépendantes ?

Exercice 5 Soit $D = [-1; 1]^2$. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (1/4) \mathbf{1}_D(x, y) [1 + xy(x^2 - y^2)].$$

1. Vérifier que la fonction f est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^2$. Dans la suite, on considère (X, Y) couple de variables aléatoires de densité f .
2. Calculer les lois marginales ainsi que la loi de $Z = X + Y$.
3. (a) Soit U une variable aléatoire de densité f_U paire. Montrer que sa fonction caractéristique Φ_U vérifie,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Phi_U(t) = 2 \int_0^\infty \cos(tu) f_U(u) du.$$

- (b) En déduire les fonctions caractéristiques Φ_X de X , Φ_Y de Y , et Φ_Z de Z . En déduire aussi que $\Phi_Z = \Phi_X \Phi_Y$.
4. Calculer la covariance de X et de Y .
5. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ? Que peut-on conclure ?