**Probabilités 5 – LICENCE L3**
**DEVOIR MAISON 2 : CORRIGÉ**

## Exercice 1

**1.** Quel que soit $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, la variable $X_k$ a pour densité $f_k = (1/2k)\mathbf{1}_{]-k;k[}$. Donc, pour tout $u \neq 0$,

$$\phi_{X_k}(u) = \mathbb{E}\left[e^{iuX_k}\right] = \int_{\mathbb{R}} e^{iux} f_k(x)dx = \int_{-k}^{k} \frac{e^{iux}}{2k}dx = \left[\frac{e^{iux}}{2kiu}\right]_{-k}^{k} = \frac{e^{iuk} - e^{-iuk}}{2kiu} = \frac{\sin(uk)}{uk}.$$

**2.** Par indépendance des variables $X_k$, $k = 1, \ldots, n$, $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, on a, pour tout $u \neq 0$,

$$\phi_{S_n}(u) = \prod_{k=1}^{n} \phi_{X_k}(u) = \prod_{k=1}^{n} \frac{\sin(uk)}{uk}.$$

Pour $u = 0$, $\phi_{S_n}(0) = 1$ (comme toutes les fonctions caractéristiques).

**3.** On a, pour tout $u \neq 0$,

$$\phi_{\frac{S_n}{n^{3/2}}}(u) = \phi_{S_n}\left(\frac{u}{n^{3/2}}\right) = \prod_{k=1}^{n} \frac{\sin\left(\frac{uk}{n^{3/2}}\right)}{\frac{uk}{n^{3/2}}}.$$

On peut prendre le logarithme du produit, pour $n$ assez grand (ce qui suffit, vu que l'on cherche un équivalent quand $n \to \infty$): en effet, la fonction $x \mapsto \sin(x)/x$ est positive pour $|x| < \pi$ ($x \neq 0$). Ici, quel que soit $k \in \{1, \ldots, n\}$, $|uk/n^{3/2}| \leq |u|n/n^{3/2} = |u|/\sqrt{n}$. Donc pour $u \neq 0$, dès que $n \geq (|u|/\pi)^2$, on a bien

$$\frac{\sin\left(\frac{uk}{n^{3/2}}\right)}{\frac{uk}{n^{3/2}}} > 0 \text{ et donc } \ln\left(\phi_{\frac{S_n}{n^{3/2}}}(u)\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{\sin\left(\frac{uk}{n^{3/2}}\right)}{\frac{uk}{n^{3/2}}}\right).$$

On sait que $\sin(v) = v - v^3/3! + o(v^3)$ quand $v \to 0$. Comme $uk/n^{3/2}$ tend vers 0 quand $n \to \infty$, on a donc,

$$\ln\left(\phi_{\frac{S_n}{n^{3/2}}}(u)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{1}{\frac{uk}{n^{3/2}}}\left\{\frac{uk}{n^{3/2}} - \frac{u^3k^3}{3!n^{9/2}} + o\left(\frac{k^3}{n^{9/2}}\right)\right\}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{u^2k^2}{6n^3} + o\left(\frac{k^2}{n^3}\right)\right).$$

De plus, $\ln(1 - v) = -v + o(v)$ quand $v \to 0$, donc,

$$\ln\left(\phi_{\frac{S_n}{n^{3/2}}}(u)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{u^2k^2}{6n^3} + o\left(\frac{k^2}{n^3}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{u^2k^2}{6n^3}\right) + o(1),$$

en utilisant $\sum_{k=1}^{n} k^2 \leq n^3$. On a donc bien, $\ln\left(\phi_{\frac{S_n}{n^{3/2}}}(u)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\sum_{k=1}^{n} \frac{u^2}{6n^3}k^2.$

**4.** On sait que

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2n^3}{6} = \frac{n^3}{3}.$$

Ainsi, $-\sum_{k=1}^{n} \frac{u^2}{6n^3}k^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{u^2}{6n^3}\frac{n^3}{3} = \frac{-1}{18}u^2$. On a donc montré $\lim_{n\to\infty} \ln\left(\phi_{\frac{S_n}{n^{3/2}}}(u)\right) = \frac{-u^2}{18}$. Par continuité de la fonction exponentielle, on en déduit que

$$\lim_{n\to\infty} \phi_{\frac{S_n}{n^{3/2}}}(u) = \exp\left(\frac{-u^2}{18}\right).$$

**5.** La fonction $g : u \mapsto \exp(-u^2/18) = \exp(-(1/9)u^2/2)$ est la fonction caractéristique de la loi gaussienne centrée de variance 1/9.
***Remarque:*** On dit que la suite de variables aléatoires $(S_n/n^{3/2})_n$ converge en loi vers la loi $\mathcal{N}(0, 9)$.

**Exercice 2**
Dans toute la correction, la notation $\mathbf{0}_j$ désigne le vecteur de $\mathbb{R}^j$ dont toutes les coordonnées sont nulles, et $\mathbf{1}_j$ le vecteur de $\mathbb{R}^j$ dont toutes les coordonnées sont égales à 1. On part de $X$, un vecteur de loi $\mathcal{N}_n(\mathbf{0}_n, I_n)$, et on construit pour tout $j$, $S_j = \sum_{i=1}^{j} X_j$.
**1.** On cherche la loi de $Y = {}^t(S_1, \ldots, S_n)$. On remarque que l'on peut écrire

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ S_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix},$$

ce qui s'écrit $Y = PX$, où $P$ est la matrice triangulaire inférieure ci-dessus, à $n$ lignes et $n$ colonnes. Donc $Y$ est encore un vecteur gaussien comme image de $X$ par une application linéaire, et précisément, $Y \sim \mathcal{N}_n(P\mathbf{0}_n, PI_n{}^tP)$. On calcule ensuite, $P\mathbf{0}_n = \mathbf{0}_n$ et

$$PI_n{}^tP = P^tP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

Comme un vecteur gaussien est entièrement caractérisé par son espérance et sa matrice de covariance, cela termine la question.
**2.** De même, $Z_j = {}^t(S_j, S_n)$ s'écrit comme image du vecteur gaussien $X$ par l'application linéaire dont la matrice est $Q$ à deux lignes et $n$ colonnes:

$$\begin{pmatrix} S_j \\ S_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t\mathbf{1}_j & {}^t\mathbf{0}_{n-j} \\ {}^t\mathbf{1}_j & {}^t\mathbf{1}_{n-j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}.$$

Le vecteur $Z_j$ est donc encore gaussien, de moyenne $Q\mathbf{0}_n = \mathbf{0}_2$, de matrice de variance $QI_n{}^tQ$ (qui est bien carrée de taille 2) , que l'on calcule

$$Q^tQ = \begin{pmatrix} {}^t\mathbf{1}_j & {}^t\mathbf{0}_{n-j} \\ {}^t\mathbf{1}_j & {}^t\mathbf{1}_{n-j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_j & \mathbf{1}_j \\ \mathbf{0}_{n-j} & \mathbf{1}_{n-j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j & j \\ j & n \end{pmatrix}.$$

**3.** Soit $T$ le vecteur aléatoire $T = {}^t(A_j, S_n)$ avec $A_j = S_j - (j/n)S_n$. On constate que $T = RZ_j$ avec $R$ la matrice carrée de taille 2 définie par

$$R = \begin{pmatrix} 1 & -j/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

C'est donc encore un vecteur gaussien. Par conséquent, la variable $A_j$ est indépendante de la variable $S_n$ si et seulement si $\mathrm{Cov}(A_j, S_n) = 0$. Or, par bilinéarité de la covariance,

$$\mathrm{Cov}(A_j, S_n) = \mathrm{Cov}(S_j - (j/n)S_n, S_n) = \mathrm{Cov}(S_j, S_n) - \frac{j}{n}\mathrm{Var}(S_n) = j - \frac{j}{n} \times n = 0,$$

puisque $\mathrm{Cov}(S_j, S_n)$ est le coefficient de la première ligne-deuxième colonne de la matrice $Q^tQ$ et $\mathrm{Var}(S_n)$ le coefficient de la deuxième ligne-deuxième colonne de cette même matrice. Finalement, la variable $A_j$ est bien indépendante de $S_n$.