Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45 rue des Saints-Pères 75006 Paris
2011-2012

UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES
UFR DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

Probabilités 5 – LICENCE L3
DEVOIR MAISON 2

Exercice 1 Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, telle que pour tout $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, X_k suit une loi uniforme sur l'intervalle $[-k;k]$.

1. Montrer que pour tout $k \geq 1$, la fonction caractéristique de X_k est égale, pour tout $u \in \mathbb{R}^*$, à
$$\phi_{X_k}(u) = \frac{\sin(uk)}{uk}.$$
2. Pour tout $n \geq 1$, on note $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Calculer la fonction caractéristique de S_n, que l'on notera ϕ_{S_n}.
3. Montrer l'équivalent $\ln\left(\phi_{\frac{S_n}{n^{3/2}}}(u)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\sum_{k=1}^{n} \frac{u^2}{6n^3}k^2$, pour $u \in \mathbb{R}^*$. *Indication :* on pourra utiliser des développements limités.
4. En déduire que pour tout $u \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} \phi_{\frac{S_n}{n^{3/2}}}(u) = g(u)$ avec $g(u) = \exp\left(-\frac{u^2}{18}\right)$.
5. De quelle type de variable aléatoire g est-elle la fonction caractéristique ?

Exercice 2 Soient n un entier naturel non nul, et $X = {}^t(X_1, \ldots, X_n)$ un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^n$ centré de matrice de covariance la matrice identité I_n. Quel que soit $j \in \{1, \ldots, n\}$, on pose $S_j = \sum_{i=1}^{j} X_i$.

1. On définit le vecteur $Y = {}^t(S_1, \ldots, S_n)$. Quelle est la loi de Y ?
2. Soit $Z_j = {}^t(S_j, S_n)$ (pour $j \in \{1, \ldots, n\}$). Déterminer la loi de Z_j.
3. On pose $A_j = S_j - (j/n)S_n$ (pour $j \in \{1, \ldots, n\}$). Les variables A_j et S_n sont-elles indépendantes ?

Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45 rue des Saints-Pères 75006 Paris
2011-2012

UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES
UFR DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

Probabilités 5 – LICENCE L3
DEVOIR MAISON 2

Exercice 1 Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, telle que pour tout $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, X_k suit une loi uniforme sur l'intervalle $[-k;k]$.

1. Montrer que pour tout $k \geq 1$, la fonction caractéristique de X_k est égale, pour tout $u \in \mathbb{R}^*$, à
$$\phi_{X_k}(u) = \frac{\sin(uk)}{uk}.$$
2. Pour tout $n \geq 1$, on note $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Calculer la fonction caractéristique de S_n, que l'on notera ϕ_{S_n}.
3. Montrer l'équivalent $\ln\left(\phi_{\frac{S_n}{n^{3/2}}}(u)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\sum_{k=1}^{n} \frac{u^2}{6n^3}k^2$, pour $u \in \mathbb{R}^*$. *Indication :* on pourra utiliser des développements limités.
4. En déduire que pour tout $u \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} \phi_{\frac{S_n}{n^{3/2}}}(u) = g(u)$ avec $g(u) = \exp\left(-\frac{u^2}{18}\right)$.
5. De quelle type de variable aléatoire g est-elle la fonction caractéristique ?

Exercice 2 Soient n un entier naturel non nul, et $X = {}^t(X_1, \ldots, X_n)$ un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^n$ centré de matrice de covariance la matrice identité I_n. Quel que soit $j \in \{1, \ldots, n\}$, on pose $S_j = \sum_{i=1}^{j} X_i$.

1. On définit le vecteur $Y = {}^t(S_1, \ldots, S_n)$. Quelle est la loi de Y ?
2. Soit $Z_j = {}^t(S_j, S_n)$ (pour $j \in \{1, \ldots, n\}$). Déterminer la loi de Z_j.
3. On pose $A_j = S_j - (j/n)S_n$ (pour $j \in \{1, \ldots, n\}$). Les variables A_j et S_n sont-elles indépendantes ?