

Probabilités 5 – LICENCE L3

DEVOIR MAISON 1 : CORRIGÉ

EXERCICE

1. La fonction f est positive, borélienne (car continue sur $\mathbb{R}^2$), et on vérifie que son intégrale sur $\mathbb{R}^2$ vaut 1 :

$$\int \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = \frac{1}{2\pi} \int \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} dx dy.$$

Comme indiqué dans l'énoncé, on passe en coordonnées polaires, c'est à dire que l'on pose le changement de variables

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta), \\ y = r \sin(\theta). \end{cases}$$

On intègre alors un rayon r positif, et un angle θ dans l'intervalle $[0; 2\pi]$. Le jacobien est r (propriétés à connaître du changement de variables en polaires). On obtient :

$$\begin{aligned} \int \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy &= \frac{1}{2\pi} \int_{\theta \in [0; 2\pi]} \int_{r > 0} \frac{1}{(1+r^2)^{3/2}} r dr d\theta, \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{\theta \in [0; 2\pi]} d\theta \right) \left(\int_{r > 0} \frac{r}{(1+r^2)^{3/2}} dr \right), \\ &= 1 \times \left[-(1+r^2)^{-1/2} \right]_0^\infty = 1. \end{aligned}$$

2. On note $V = X/\sqrt{1+Y^2}$. On emploie la méthode de la fonction muette. Soit $f_{(Y,V)}$ une densité du couple (Y, V) . Soit φ une fonction (muette) continue et bornée sur $\mathbb{R}^2$. D'une part,

$$\mathbb{E}[\varphi(Y, V)] = \int \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(y, v) f_{(Y,V)}(y, v) dy dv. \quad (1)$$

D'autre part, on calcule

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\varphi(Y, V)] &= \mathbb{E} \left[\varphi \left(Y, \frac{X}{\sqrt{1+Y^2}} \right) \right], \\ &= \int \int_{\mathbb{R}^2} \varphi \left(y, \frac{x}{\sqrt{1+y^2}} \right) f(x, y) dx dy = \int \int_{\mathbb{R}^2} \varphi \left(y, \frac{x}{\sqrt{1+y^2}} \right) \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} dx dy. \end{aligned}$$

On pose le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} u = y, \\ v = \frac{x}{\sqrt{1+y^2}}, \end{cases} \iff \begin{cases} x = v\sqrt{1+u^2}, \\ y = u. \end{cases}$$

On note $\psi : (u, v) \mapsto (x, y) = (v\sqrt{1+u^2}, u)$. On calcule le nouveau domaine d'intégration : $\psi^{-1}(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$ et aussi, pour tout couple $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, le jacobien de ψ au point (u, v) :

$$J\psi(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{uv}{\sqrt{1+u^2}} & \sqrt{1+u^2} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -\sqrt{1+u^2}.$$

Donc la valeur absolue du jacobien au point (u, v) est $|J\psi(u, v)| = \sqrt{1+u^2}$. Ainsi, la fonction ψ est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de $\psi^{-1}(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$: elle est bijective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, différentiable, et de jacobien inversible. On en déduit :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\varphi(Y, V)] &= \int \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(u, v) \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{1+u^2}}{(1+v^2(1+u^2)+u^2)^{3/2}} dudv, \\ &= \int \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(u, v) \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(1+u^2)(1+v^2)^{3/2}} dudv. \end{aligned} \quad (2)$$

On a donc égalité entre les expressions (1) et (2) quelle que soit la fonction φ choisie. Donc, par le critère de la fonction muette, on a

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad f_{(Y,V)}(u, v) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(1+u^2)(1+v^2)^{3/2}}.$$

3. On remarque que la densité $f_{(Y,V)}(u, v)$ du couple (Y, V) en un point (u, v) s'écrit comme le produit d'une fonction de la variable u par une fonction de v : précisément, on a

$$f_{(Y,V)}(u, v) = \frac{1}{2\pi} f_1(u) f_2(v),$$

avec les notations

$$f_1(u) = \frac{1}{1+u^2} \text{ et } f_2(v) = \frac{1}{(1+v^2)^{3/2}}.$$

Par conséquent, les variables Y et V sont indépendantes.

Remarque : On peut facilement en déduire une densité de chacune de ces deux variables : Y a une densité f_Y proportionnelle à f_1 , c'est à dire $f_Y = c f_1$, avec c constante telle que $\int_{\mathbb{R}} f_Y(u) du = 1$. On obtient ainsi,

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad f_Y(u) = \frac{1}{\pi(1+u^2)},$$

ce qui prouve que Y suit une loi de Cauchy. De même, on a une densité f_V de V :

$$\forall v \in \mathbb{R}, \quad f_V(v) = \frac{1}{2(1+v^2)^{3/2}}.$$

PROBLEME

- (a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Pour montrer que $\Gamma(x)$ existe, il faut justifier que la fonction définie par $g_x(t) = t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
 - La fonction g_x est continue donc localement intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (c'est-à-dire intégrable sur tout intervalle borné $[a; b] \subset [0; \infty[$).
 - On doit étudier l'intégrabilité au voisinage de 0 et de $+\infty$. La fonction g_x est de signe constant positif : on peut donc employer des critères de comparaison. On remarque $\lim_{t \rightarrow \infty} t^2 g_x(t) = 0$ (par comparaison exponentielle/fonction puissance) donc g_x est négligeable devant la fonction $t \mapsto 1/t^2$. Ainsi, par le critère de Riemann, g est intégrable en $+\infty$. Enfin, en 0, g_x est équivalente à la fonction $t \mapsto 1/t^{1-p}$, qui est intégrable en 0 (intégrale de Riemann, $1-p < 1$). Donc g_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
- (b) Soit $x > 0$. On calcule $\Gamma(x+1)$ en faisant une intégration par parties :

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= \int_0^\infty t^x e^{-t} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A t^x e^{-t} dt, \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} [-t^x e^{-t}]_0^A + x \int_0^A t^{x-1} e^{-t} dt = x \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt = x \Gamma(x). \end{aligned}$$

(c) On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, pour montrer $\Gamma(n+1) = n!$. *Initialisation* : Si $n = 0$, $\Gamma(0+1) = \Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = [e^{-t}]_0^\infty = 1 = 0!$. *Transmission* : Posons $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Par la question précédente, $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$, cad $\Gamma(n+1) = n(n-1)!$ par hypothèse de récurrence et donc $\Gamma(n+1) = n!$. La propriété est donc vraie quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

- (a) La fonction $f_{p,\theta}$ est positive ($\theta^p > 0$, $\exp(-\theta t) > 0$, et $\Gamma(p) > 0$ comme intégrale d'une fonction positive). Ensuite, $f_{p,\theta}$ est borélienne car continue sur $\mathbb{R}$ sauf en 0. Enfin, montrons que l'intégrale de $f_{p,\theta}$ sur $\mathbb{R}$ existe et vaut 1. Pour l'existence, la justification est la même que pour la fonction Γ . Calculons,

$$\int_{\mathbb{R}} f_{p,\theta}(t) dt = \frac{\theta^p}{\Gamma(p)} \int_{\mathbb{R}} e^{-\theta t} t^{p-1} \mathbf{1}_{t>0} dt = \frac{\theta^p}{\Gamma(p)} \int_0^\infty e^{-\theta t} t^{p-1} dt.$$

On pose le changement de variable linéaire $u = \theta t$. On a $dt = du/\theta$. Ainsi,

$$\int_{\mathbb{R}} f_{p,\theta}(t) dt = \frac{\theta^p}{\Gamma(p)} \int_0^\infty e^{-u} \frac{u^{p-1}}{\theta^{p-1}} \frac{du}{\theta} = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^\infty u^{p-1} e^{-u} du = 1.$$

(b) *Calcul de l'espérance :*

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} t f_{p,\theta}(t) dt = \frac{\theta^p}{\Gamma(p)} \int_0^\infty e^{-\theta t} t^p dt.$$

Justifions l'existence de l'intégrale. Soit $h(t) = e^{-\theta t} t^p$. Cette fonction h est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc localement intégrable, et négligeable devant $t \mapsto t^{-2}$ en ∞ donc intégrable, par comparaison (h est positive). En 0, la fonction est continue (elle a pour limite finie 0, donc l'intégrale est faussement impropre). On peut donc poursuivre le calcul, en posant le changement de variables linéaire $u = \theta t$.

$$\mathbb{E}[X] = \frac{\theta^p}{\Gamma(p)} \int_0^\infty \frac{u^p}{\theta^p} e^{-u} \frac{du}{\theta} = \frac{1}{\theta} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p)} = \frac{p\Gamma(p)}{\theta\Gamma(p)} = \frac{p}{\theta}.$$

Calcul de la variance : on a $\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$. On calcule donc $\mathbb{E}[X^2]$. L'existence de cette espérance se justifie exactement comme ci-dessus, et on fait le même changement de variables $u = \theta t$. On a donc,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^2] &= \int_{\mathbb{R}} t^2 f_{p,\theta}(t) dt = \frac{\theta^p}{\Gamma(p)} \int_0^\infty e^{-\theta t} t^{p+1} dt, \\ &= \frac{\theta^p}{\Gamma(p)} \int_0^\infty \frac{u^{p+1}}{\theta^{p+1}} e^{-u} \frac{du}{\theta} = \frac{1}{\theta^2} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p)} = \frac{p(p+1)\Gamma(p)}{\theta^2\Gamma(p)} = \frac{p(p+1)}{\theta^2}. \end{aligned}$$

Par suite, $\text{Var}(X) = (p(p+1) - p^2)/\theta^2 = p/\theta^2$.

3. (a) On utilise la méthode de la fonction muette. On cherche donc une densité $f_{(S,T)}$ du couple (S,T) . On remarque déjà que par indépendance de X et Y , une densité $f_{(X,Y)}$ du couple (X,Y) est obtenue comme produit d'une densité de X par une densité de Y c'est-à-dire :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{\theta^{p+q}}{\Gamma(p)\Gamma(q)} e^{-\theta(x+y)} x^{p-1} y^{q-1} \mathbf{1}_D(x,y),$$

où on note $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y > 0\}$. On se donne φ une fonction (muette) continue et bornée sur $\mathbb{R}^2$. D'une part, par définition de l'espérance,

$$\mathbb{E}[\varphi(S,T)] = \int_{\mathbb{R}} \varphi(s,t) f_{(S,T)}(s,t) ds dt. \quad (3)$$

D'autre part, en utilisant les définitions des variables S et T ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\varphi(S,T)] &= \mathbb{E}\left[\varphi\left(X+Y, \frac{X}{X+Y}\right)\right] = \int \int_D \varphi\left(x+y, \frac{x}{x+y}\right) f_{(X,Y)}(x,y) dx dy, \\ &= \frac{\theta^{p+q}}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int \int_D \varphi\left(x+y, \frac{x}{x+y}\right) x^{p-1} y^{q-1} e^{-\theta(x+y)} dx dy. \end{aligned}$$

Posons le changement de variables

$$\begin{cases} s = x+y, \\ t = \frac{x}{x+y} \end{cases} \iff \begin{cases} x = st, \\ y = s(1-t). \end{cases}$$

La fonction $\psi : (s,t) \mapsto \psi(s,t) = (x,y) = (st, s(1-t))$ est un C^1 -difféomorphisme de l'ensemble $\psi^{-1}(D)$ sur D . En effet, tout d'abord, on a pu calculer (x,y) en fonction de (s,t) en inversant le système ci-dessus. Ensuite, on calcule le nouveau domaine d'intégration :

$$\begin{aligned} \psi^{-1}(D) &= \{(s,t) \in \mathbb{R}^2, st > 0 \text{ et } s(1-t) > 0\}, \\ &= \{(s,t) \in \mathbb{R}^2, s > 0 \text{ et } 0 < t < 1\}. \end{aligned}$$

Enfin, on calcule le jacobien en un point (s, t) :

$$J\psi(s, t) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t & s \\ 1-t & -s \end{vmatrix} = -s.$$

Comme $s > 0$, le jacobien $J\psi(s, t)$ est inversible (ce qui termine de montrer que ψ est un C^1 -difféomorphisme de l'ensemble $\psi^{-1}(D)$ sur D) et sa valeur absolue est $|J(s, t)| = s$. On obtient donc,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\varphi(S, T)] &= \frac{\theta^{p+q}}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int \int_{\psi^{-1}(D)} \varphi(s, t) e^{-\theta s} (st)^{p-1} (s(1-t))^{q-1} ds dt, \\ &= \int \int_{\mathbb{R}} \varphi(s, t) \frac{\theta^{p+q}}{\Gamma(p)\Gamma(q)} e^{-\theta s} s^{p+q-1} t^{p-1} (1-t)^{q-1} \mathbf{1}_{\psi^{-1}(D)}(s, t) ds dt. \end{aligned} \quad (4)$$

On a donc égalité entre les expressions (3) et (4) quelle que soit la fonction φ choisie. Donc, par le critère de la fonction muette, on a

$$\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2, \quad f_{(S, T)}(s, t) = \frac{\theta^{p+q}}{\Gamma(p)\Gamma(q)} e^{-\theta s} s^{p+q-1} t^{p-1} (1-t)^{q-1} \mathbf{1}_{0 < t < 1} \mathbf{1}_{s > 0}.$$

(b) La densité du couple (S, T) prise au point (s, t) s'écrit comme le produit d'une fonction de s par une fonction de t : précisément, $f_{(S, T)}(s, t) = c f_1(s) f_2(t)$, où c est une constante et où

$$f_1(s) = e^{-\theta s} s^{p+q-1} \mathbf{1}_{s > 0}, \quad f_2(t) = t^{p-1} (1-t)^{q-1} \mathbf{1}_{0 < t < 1}.$$

On en déduit que les variables S et T sont indépendantes, qu'une densité f_S de S est proportionnelle à f_1 et qu'une densité f_T de T est proportionnelle à f_2 .

On reconnaît dans la fonction f_1 , la densité $f_{p+q, \theta}$ de la loi $\gamma(p+q, \theta)$, à constante près. Par conséquent, une densité de S est $f_S = f_{p+q, \theta} = \theta^{p+q} / \Gamma(p+q) f_1$, et S suit donc bien une loi $\gamma(p+q, \theta)$.

Ainsi, $f_{(S, T)}(s, t) = \Gamma(p+q) / [\Gamma(p)\Gamma(q)] f_2(t) f_S(s)$. Donc on identifie une densité de T : $f_T(t) = \Gamma(p+q) / [\Gamma(p)\Gamma(q)] t^{p-1} (1-t)^{q-1} \mathbf{1}_{]0,1[}(t)$, ce qui est bien la fonction donnée dans l'énoncé.

Remarque : Une autre méthode consiste à calculer les densités marginales en calculant les intégrales suivantes :

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad f_S(s) = \int_{\mathbb{R}} f_{(S, T)}(s, t) dt \quad \text{et} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad f_T(t) = \int_{\mathbb{R}} f_{(S, T)}(s, t) ds,$$

on aboutit bien sûr au même résultat.

4. (a) Une densité sur $\mathbb{R}$ de la variable Z suivant la loi $\mathcal{N}(0, 1)$ est $f_Z : z \mapsto (1/\sqrt{2\pi}) \exp(-z^2/2)$. Notons $U = Z^2$ et cherchons une densité f_U de U . On considère φ une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}$. D'une part,

$$\mathbb{E}[\varphi(U)] = \int_{\mathbb{R}} \varphi(u) f_U(u) du. \quad (5)$$

D'autre part,

$$\mathbb{E}[\varphi(U)] = \mathbb{E}[\varphi(Z^2)] = \int_{\mathbb{R}} \varphi(z^2) f_Z(z) dz.$$

On aimerait poser $u = z^2$, mais la fonction $z \mapsto z^2$ n'est pas bijective sur $\mathbb{R}$. Par contre elle l'est sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$. On utilise donc la relation de Chasles pour écrire :

$$\mathbb{E}[\varphi(U)] = \int_{-\infty}^0 \varphi(z^2) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-z^2/2) dz + \int_0^{\infty} \varphi(z^2) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-z^2/2) dz$$

Dans la première intégrale, le changement de variable $u = z^2$ est équivalent à $z = -\sqrt{u}$, et $dz = -du/(2\sqrt{u})$. Dans la seconde, $u = z^2$ est équivalent à $z = \sqrt{u}$, et $dz = du/(2\sqrt{u})$. Ces changements de

variables sont justifiés car $\psi(u) = -\sqrt{u}$ est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_-^*$, et $\tilde{\psi}(u) = \sqrt{u}$ est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On obtient donc,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\varphi(U)] &= \int_{+\infty}^0 \varphi(u) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-u/2) \frac{(-1)}{2\sqrt{u}} du + \int_0^\infty \varphi(u) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-u/2) \frac{1}{2\sqrt{u}} du, \\ &= \int_0^{+\infty} \varphi(u) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-u/2) \frac{1}{2\sqrt{u}} du + \int_0^\infty \varphi(u) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-u/2) \frac{1}{2\sqrt{u}} du, \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(u) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-u/2) u^{-1/2} \mathbf{1}_{u>0} du.\end{aligned}\tag{6}$$

En écrivant l'égalité entre les intégrales (5) et (6), le critère de la fonction muette permet de conclure qu'une densité de U est

$$f_U : u \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u/2} u^{-1/2} \mathbf{1}_{u>0}.$$

On sait que f_U est une densité, donc

$$\int_{\mathbb{R}} f_U(u) du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-u/2} u^{-1/2} du = 1,$$

c'est à dire, en posant le changement de variable linéaire $t = u/2$,

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-t} t^{-1/2} du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma(1/2) = 1,$$

et donc $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Remarque : on aurait pu aussi dire tout de suite qu'à constante près, f_U est une densité d'une loi $\gamma(1/2, 1/2)$ et donc que, par identification, la valeur de $\Gamma(1/2)$ est $\sqrt{\pi}$.

(b) Tout d'abord, par la question précédente, quel que soit $i \in \{1, \dots, n\}$, Z_i^2 suit une loi $\gamma(1/2, 1/2)$. Ensuite, par la question 3.(b), une somme de deux variables indépendantes suivant la même loi $\gamma(p, \theta)$ suit une loi $\gamma(2p, \theta)$ (prendre $p = q$ dans la question 3.(b)). On en déduit par récurrence qu'une somme de n variables aléatoires indépendantes de même loi $\gamma(p, \theta)$ suit une loi $\gamma(np, \theta)$. On applique ceci aux variables Z_i^2 avec $i \in \{1, \dots, n\}$ (et avec $p = 1/2$ et $\theta = 1/2$) : elles sont bien indépendantes, car les Z_i le sont. Cela donne le résultat : la variable $\sum_{i=1}^n Z_i^2$ suit une loi $\gamma(n/2, 1/2)$.