Probabilités 5 – LICENCE L3
DEVOIR MAISON 1: CORRIGÉ

Exercice 1

1. (a) On note f_X une densité de la variable X, $Y = aX + b$, et f_Y une densité de Y. Soit φ une fonction ('muette') continue et bornée sur $\mathbb{R}$. D'une part,

$$\mathbb{E}\left[\varphi(Y)\right] = \int_{\mathbb{R}} \varphi(y) f_Y(y) dy. \tag{1}$$

D'autre part,

$$\mathbb{E}[\varphi(Y)] = \mathbb{E}[\varphi(aX+b)] = \int_{\mathbb{R}} \varphi(ax+b) f_X(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(ax+b) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}.$$

On pose le changement de variable affine $y = ax + b$, c'est-à-dire $x = (y-b)/a$ ($a \neq 0$). Pour trouver les bornes, on distingue les cas $a > 0$ et $a < 0$. Si $a > 0$ on obtient,

$$\mathbb{E}[\varphi(Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) \exp\left(-\frac{(y-b)^2}{2a^2}\right) \frac{dy}{a\sqrt{2\pi}}.$$

Si $a < 0$, on obtient,

$$\mathbb{E}[\varphi(Y)] = \int_{+\infty}^{-\infty} \varphi(y) \exp\left(-\frac{(y-b)^2}{2a^2}\right) \frac{dy}{a\sqrt{2\pi}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \exp\left(-\frac{(y-b)^2}{2a^2}\right) \frac{dy}{(-a)\sqrt{2\pi}}.$$

En résumé, quel que soit $a \neq 0$,

$$\mathbb{E}[\varphi(Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \exp\left(-\frac{(y-b)^2}{2a^2}\right) \frac{dy}{|a|\sqrt{2\pi}}. \tag{2}$$

Par le critère de la fonction muette, comme on a égalité entre (1) et (2) quelle que soit la fonction φ, on en déduit que

$$f_Y(y) = \frac{1}{|a|\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(y-b)^2}{2a^2}\right).$$

Ainsi, Y suit la loi normale $\mathcal{N}(b, a^2)$.

1. (b) On commence par justifier que les espérances

$$\mathbb{E}\left[X^n\right] = \int_{\mathbb{R}} x^n f_X(x) dx, \quad n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$$

existent. Pour tout $n \geq 0$, la fonction $x \mapsto x^n f_X(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. En effet, c'est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ (produit et composée de fonctions continues), donc localement intégrable sur $\mathbb{R}$ (intégrable sur tout segment). De plus, cette fonction est de signe constant (positif) sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\lim_{x\to\infty} x^2 \left(x^n f_X(x)\right) = 0,$$

donc $x^n f_X(x) = o(1/x^2)$. Or $\int_1^\infty dx/x^2$ converge (intégrale de Riemann), donc, par comparaison, $\int_1^\infty x^n f_X(x) dx$ converge aussi. Enfin, la fonction considérée est paire ou impaire (selon la parité de n), donc l'intégrale en $-\infty$ est également convergente.

Pour le calcul des espérances, on remarque que si n est impair, $n = 2p+1$ ($p \in \mathbb{N}$), la fonction $x \mapsto x^n f_X(x)$ est impaire (et intégrable), donc son intégrale sur $\mathbb{R}$ est nulle. Donc $\mathbb{E}[X^{2p+1}] = 0$. Si n est pair, on note $n = 2p$ ($p \geq 1$). Comme indiqué dans l'énoncé, on calcule

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X^{2p+2}\right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2p+2} e^{-x^2/2} dx, \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} x^{2p+2} e^{-x^2/2} dx, \text{ car la fonction intégrée est paire,} \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \lim_{A\to\infty} \int_0^A x^{2p+2} e^{-x^2/2} dx,
\end{aligned}$$

et on intègre par parties en posant $u'(x) = xe^{-x^2/2}$ et $v(x) = x^{2p+1}$. On a donc $u(x) = -e^{-x^2/2}$ et $v'(x) = (2p+1)x^{2p}$. Les fonctions u et v sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; A]$. On obtient,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[X^{2p+2}\right] &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \lim_{A\to\infty} \left\{ \left[-e^{-x^2/2} x^{2p+1}\right]_0^A + (2p+1)\int_0^A x^{2p} e^{-x^2/2} dx \right\}, \\ &= \frac{2(2p+1)}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty x^{2p} e^{-x^2/2} dx = \frac{(2p+1)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty x^{2p} e^{-x^2/2} dx. \end{aligned}$$

On a donc la relation de récurrence, $\mathbb{E}[X^{2p+2}] = (2p+1)\mathbb{E}[X^{2p}]$. On en déduit,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[X^{2p+2}\right] &= (2p+1)(2p-1)(2p-3) \times \cdots \times 3\mathbb{E}\left[X^2\right], \\ &= (2p+1)(2p-1)(2p-3) \times \cdots 3 \times 1, \\ &= \frac{(2p+1)(2p)(2p-1)(2p-2)(2p-3) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1}{(2p)(2p-2) \times \cdots \times 2}, \\ &= \frac{(2p+1)!}{2^p p(p-1) \times \cdots \times 1} = \frac{(2p+1)!}{2^p p!} = \frac{(2p+2)!}{2^{p+1}(p+1)!}. \end{aligned}$$

Ce qui termine de montrer que pour tout p, $\mathbb{E}[X^{2p}] = (2p)!/(2^p p!)$. On a donc en particulier $\mathbb{E}[X^2] = 1$, et donc

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left[X^2\right] - (\mathbb{E}[X])^2 = 1 - 0 = 1.$$

1. (c) Soit $x \in \mathbb{R}$. Par définition, $F_X(-x) = \mathbb{P}(X \le -x)$. Donc

$$F_X(-x) = \mathbb{P}(-X \ge x) = 1 - \mathbb{P}(-X < x) = 1 - \mathbb{P}(-X \le x),$$

puisque $\mathbb{P}(X = 0) = 0$ (X est une variable à densité). Or la variable aléatoire $-X$ a même loi que X: en effet, la densité de X est paire (appliquer éventuellement la méthode de la fonction muette pour déterminer la loi de $T = -X$ pour s'en convaincre). Donc, la fonction de répartition de $-X$ est la même que celle de X: $\mathbb{P}(-X \le x) = \mathbb{P}(X \le x)$. On a donc

$$F_X(-x) = 1 - F_X(x).$$

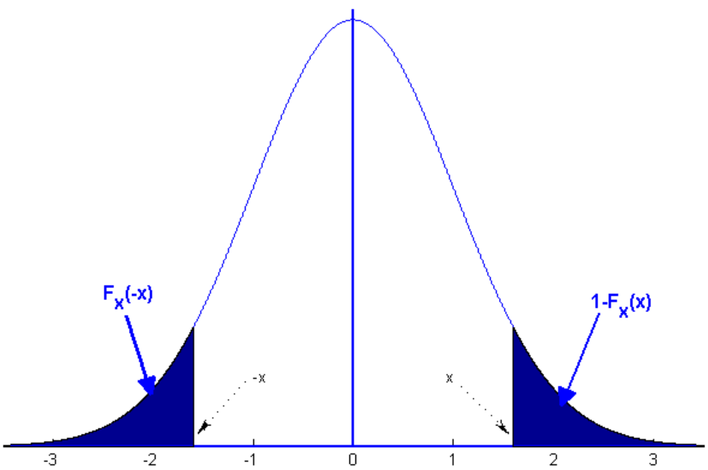

Figure 1: Densité de la loi normale centrée réduite

1.(d) On note f_Z une densité de la variable $Z = X^2 + 2X$. Soit φ une fonction ('muette') continue et bornée sur $\mathbb{R}$. D'une part,

$$\mathbb{E}\left[\varphi(Z)\right] = \int_{\mathbb{R}} \varphi(z) f_Z(z) dz. \tag{3}$$

D'autre part,

$$\mathbb{E}[\varphi(Z)] = \mathbb{E}[\varphi(X^2+2X)] = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x^2+2x) f_X(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x^2+2x)\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}.$$

On ne peut pas poser le changement de variables $z = x^2+2x$ sur $\mathbb{R}$, car la fonction polynômiale $g(x) = x^2+2x$ n'est pas bijective sur $\mathbb{R}$, comme le montre le tableau de variations suivant:

$$\begin{array}{c|ccccc|}
x & -\infty & & -1 & & +\infty \\
\hline
 & +\infty & & & & +\infty \\
g(x) & & \searrow & & \nearrow & \\
 & & & -1 & & \\
\hline
\end{array}$$

Cette fonction est bijective, de classe $\mathcal{C}^1$, et de réciproque $\mathcal{C}^1$ sur les intervalles $]-\infty;-1[$ et $]-1;\infty[$ (car strictement monotone et continue). On coupe donc l'intégrale en deux:

$$\mathbb{E}[\varphi(Z)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{-1} \varphi(x^2+2x)\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx + \int_{-1}^{\infty} \varphi(x^2+2x)\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx\right).$$

Et on pose donc un changement de variables dans chacune des deux intégrales: $z = x^2+2x$. Le polynôme $P(x) = x^2+2x-z$ a deux racines: $x_1 = -1-\sqrt{1+z} < -1$, et $x_2 = -1+\sqrt{1+z} > -1$. Dans la première intégrale, $x \in]-\infty;-1[$, donc le changement de variable équivaut à $x = x_1$, et $dx = (-1/(2\sqrt{1+z}))dz$. Dans la seconde, $x \in]-1;\infty[$, donc $x = x_2$, et $dx = dz/(2\sqrt{1+z})$. On obtient donc,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\varphi(Z)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{+\infty}^{-1}\varphi(z)\exp\left(-\frac{(\sqrt{1+z}+1)^2}{2}\right)\frac{-dz}{2\sqrt{1+z}} + \int_{-1}^{\infty}\varphi(z)\exp\left(-\frac{(\sqrt{1+z}-1)^2}{2}\right)\frac{dz}{2\sqrt{1+z}}\right), \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{+\infty}\varphi(z)\left[\exp\left(-\frac{(\sqrt{1+z}+1)^2}{2}\right) + \exp\left(-\frac{(\sqrt{1+z}-1)^2}{2}\right)\right]\frac{dz}{2\sqrt{1+z}}.
\end{aligned}$$

Par le critère de la fonction muette, en comparant cette dernière égalité avec (3), on en déduit que

$$f_Z(z) = \frac{1}{2\sqrt{1+z}\sqrt{2\pi}}\left[\exp\left(-\frac{(\sqrt{1+z}+1)^2}{2}\right) + \exp\left(-\frac{(\sqrt{1+z}-1)^2}{2}\right)\right]\mathbf{1}_{]-1;\infty[}(z).$$

2. Soient $T = Y/X$, f_T une densité de T, et φ une fonction borélienne bornée sur $\mathbb{R}$. D'une part,

$$\mathbb{E}\left[\varphi(T)\right] = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) f_T(t)dt.$$

D'autre part,

$$\mathbb{E}\left[\varphi(T)\right] = \mathbb{E}\left[\varphi\left(\frac{Y}{X}\right)\right] = \int\int_{\mathbb{R}^2} \varphi\left(\frac{y}{x}\right) f_{(X,Y)}(x,y)dxdy,$$

où $f_{(X,Y)}$ est une densité de (X,Y). Comme X est indépendant de Y, on a $f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$. Ainsi,

$$\mathbb{E}\left[\varphi(T)\right] = \frac{1}{2\pi}\int\int_{\mathbb{R}^2}\varphi\left(\frac{y}{x}\right)\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)dxdy.$$

On pose le changement de variables suivant, dans l'intégrale double:

$$\left\{\begin{array}{l} t = \frac{y}{x} \\ s = x \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = s \\ y = ts. \end{array}\right.$$

L'application $\psi : (s,t) \mapsto (x,y) = (s,ts)$ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de $\psi^{-1}(\mathbb{R}^2)$ dans $\mathbb{R}^2$: en effet, elle est bijective, de classe $\mathcal{C}^1$ et son jacobien en un point (s,t) de $\mathbb{R}^2$ est

$$J\psi(s,t) = \left|\begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ t & s \end{array}\right| = s.$$

Ainsi, $|J\psi(s,t)| = |s|$, qui est inversible (sauf pour $s=0$). Il vient,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\varphi(T)\right] &= \frac{1}{2\pi}\int\int_{\mathbb{R}^2} \varphi(t)\exp\left(-\frac{s^2+t^2s^2}{2}\right)|s|dsdt,\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\varphi(t)\left(\int_{\mathbb{R}}|s|\exp\left(-s^2\frac{1+t^2}{2}\right)ds\right)dt \text{ par le théorème de Fubini,}\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\varphi(t)2\left(\int_0^\infty s\exp\left(-s^2\frac{1+t^2}{2}\right)ds\right)dt \text{ par parité,}\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\varphi(t)\left[-\frac{1}{1+t^2}\exp\left(-s^2\frac{1+t^2}{2}\right)\right]_0^\infty dt,\\
&= \int_{\mathbb{R}}\varphi(t)\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+t^2}dt.
\end{aligned}$$

Par le critère de la fonction muette, on en déduit que $f_T(t) = 1/(\pi(1+t^2))$, $t\in\mathbb{R}$, et donc que T suit une loi de Cauchy.
Pour savoir si T admet une espérance, on regarde l'intégrabilité de la fonction $\chi : t \mapsto tf_T(t)$, qui est de signe constant sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$. Au voisinage de ∞, on a l'équivalent

$$\chi(t) = \frac{t}{\pi(1+t^2)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\pi t}.$$

Or, la fonction $t\mapsto 1/t$ n'est pas intégrable en ∞. Donc par comparaison, χ ne l'est pas non plus. La variable T n'admet pas d'espérance.
3. On cherche une densité $f_{(X,Y)}$ du couple $(X,Y) = (\sqrt{W}\cos(\Theta), \sqrt{W}\sin(\Theta))$. Soit φ une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}^2$. D'une part,

$$\mathbb{E}\left[\varphi(X,Y)\right] = \int_{\mathbb{R}^2}\varphi(x,y)f_{(X,Y)}(x,y)dxdy.$$

D'autre part,

$$\mathbb{E}\left[\varphi(X,Y)\right] = \mathbb{E}\left[\varphi\left(\sqrt{W}\cos(\Theta),\sqrt{W}\sin(\Theta)\right)\right] = \int_{\mathbb{R}^2}\varphi(\sqrt{w}\cos(\theta),\sqrt{w}\sin(\theta))f_{(W,\Theta)}(w,\theta)dwd\theta,$$

où $f_{(W,\Theta)}$ est une densité du couple (W,Θ). Les deux variables W et Θ sont indépendantes, donc une densité du couple (W,Θ) est $f_{(W,\Theta)}(w,\theta) = f_W(w)f_\Theta(\theta)$, $w,\theta\in\mathbb{R}$. De plus, la variable W suit une loi $\mathcal{E}(1/2)$, donc une densité de W est $f_W(w) = \exp(-w/2)/2\mathbf{1}_{w>0}$. Pour la variable Θ, une densité est donnée par $f_\Theta(\theta) = \mathbf{1}_{]0,2\pi[}(\theta)/(2\pi)$. On a donc,

$$\mathbb{E}\left[\varphi(X,Y)\right] = \int\int_D \varphi(\sqrt{w}\cos(\theta),\sqrt{w}\sin(\theta))\frac{1}{4\pi}\exp\left(-\frac{w}{2}\right)dwd\theta,$$

avec $D = \mathbb{R}_+^*\times]0;2\pi[= \{(w,\theta)\in\mathbb{R}^2, w>0, 0<\theta<2\pi\}$. On pose le changement de variables

$$\left\{\begin{array}{l} x = \sqrt{w}\cos(\theta),\\ y = \sqrt{w}\sin(\theta).\end{array}\right.$$

Si on veut exprimer (w,θ) en fonction de (x,y), il faut être prudent. On a bien $w = x^2+y^2$, mais on ne peut pas tout le temps écrire $\theta = \arctan(y/x)$: en effet, cela signifirait que $\theta\in]-\pi/2;\pi/2[$. Pour avoir θ dans $]0;2\pi[$, comme dans l'intégrale de départ, il faut choisir:

$$\theta = \left\{\begin{array}{l} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \text{ si } x>0 \text{ et } y>0;\\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right)+2\pi \text{ si } x>0 \text{ et } y<0;\\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right)+\pi \text{ si } x<0.\end{array}\right. \tag{4}$$

L'application $\psi : (x,y) \mapsto (\theta, w)$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\psi^{-1}(D) = \mathbb{R}^2 \backslash \mathbb{R}_+^* \times \{0\}$ dans D, de jacobien en un point (x,y)

$$J\psi(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial\theta}{\partial x} & \frac{\partial\theta}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{-y}{x^2+y^2} & \dfrac{x}{x^2+y^2} \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = \frac{-2y^2}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{x^2+y^2} = -2.$$

On remarque que les différents cas pour θ (cf. (4)) ne changent pas la valeur du jacobien. Quel que soit (x,y), on a $|J\psi(x,y)| = 2$ aussi. De plus, les différentes expressions n'interviennent pas non plus dans l'intégrale. Ainsi,

$$\mathbb{E}\left[\varphi(X,Y)\right] = \int\int_{\psi^{-1}(D)} \varphi(x,y) \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) \frac{1}{2\pi} dxdy = \int\int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x,y) \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) \frac{1}{2\pi} dxdy.$$

Le critère de la fonction muette permet de conclure que

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) \frac{1}{2\pi}.$$

Remarque: l'expression de θ n'était utile ici que pour le calcul du jacobien. On peut sinon calculer le jacobien de $\psi^{-1} : (w,\theta) \mapsto (x,y)$:

$$J\psi^{-1}(w,\theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\sqrt{w}\sin(\theta) & \sqrt{w}\cos(\theta) \\ \dfrac{\cos(\theta)}{2\sqrt{w}} & \dfrac{\sin(\theta)}{2\sqrt{w}} \end{vmatrix} = -1/2,$$

et utiliser $J\psi(x,y) = 1/(J^{-1}\psi(w,\theta)) = 1/(-1/2) = -2\ldots$

Exercice 2

1. Montrons que la fonction $f : (x,y) \mapsto f(x,y) = (\lambda^4/2)x^2\exp(-\lambda y)\mathbf{1}_{0<x<y}$ est une densité de probabilité. D'abord, quel que soit (x,y), $f(x,y) \geq 0$ (produit de fonctions positives ou nulles). Ensuite, f est continue sur $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 < x < y\}$ (produit de fonctions continues), nulle en dehors du domaine D (donc continue), et le bord (c'est-à-dire $\{(x,y),\ x = 0 \text{ ou } y = 0\}$) est négligeable. Ainsi, f est borélienne. Enfin, on calcule, sous réserve de convergence

$$\begin{aligned}
\int\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy &= \frac{\lambda^4}{2}\int\int_D x^2\exp\left(-\lambda y\right)dxdy, \\
&= \frac{\lambda^4}{2}\int_{x=0}^{\infty} x^2\left(\int_{y=x}^{\infty}\exp\left(-\lambda y\right)dy\right)dx, \text{ par le théorème de Fubini-Tonelli,} \\
&= \frac{\lambda^4}{2}\int_{x=0}^{\infty} x^2\left[\frac{-1}{\lambda}\exp\left(-\lambda y\right)\right]_x^{\infty}dx = \frac{\lambda^3}{2}\int_{x=0}^{\infty} x^2\exp\left(-\lambda x\right)dx, \\
&= \frac{1}{2}\int_{u=0}^{\infty} u^2\exp\left(-u\right)du \text{ en posant le changement de variables linéaire } u = \lambda x, \\
&= \frac{1}{2}\Gamma(3) = \frac{2!}{2} = 1.
\end{aligned}$$

Ainsi, f est bien une densité.

2. Soit (X,Y) un couple de densité f. On cherche f_X (respectivement f_Y) une densité de X (respectivement de Y). On calcule, quel que soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dy = \int_{\mathbb{R}} \frac{\lambda^4}{2}x^2\exp\left(-\lambda y\right)\mathbf{1}_{0<x<y}dy, \\
&= \frac{\lambda^4}{2}x^2\mathbf{1}_{x>0}\int_x^{\infty}\exp\left(-\lambda y\right)dy = \frac{\lambda^4}{2}x^2\mathbf{1}_{x>0}\left[-\frac{1}{\lambda}\exp\left(-\lambda y\right)\right]_x^{\infty}, \\
&= \frac{\lambda^3}{2}x^2\exp\left(-\lambda x\right)\mathbf{1}_{x>0}.
\end{aligned}$$

Ce qui donne une densité de X. De même, quel que soit $y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\lambda^4}{2} x^2 \exp(-\lambda y) \mathbf{1}_{0<x<y} dx, \\ &= \frac{\lambda^4}{2} \exp(-\lambda y) \mathbf{1}_{y>0} \int_0^y x^2 dx, \\ &= \frac{\lambda^4}{6} y^3 \exp(-\lambda y) \mathbf{1}_{y>0}. \end{aligned}$$

On a ici $f_{(X,Y)}(x,y) \neq f_X(x) f_Y(y)$, donc les variables X et Y ne sont pas indépendantes.