Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45 rue des Saints-Pères 75006 Paris
2011-2012

Probabilités 5 – LICENCE L3
DEVOIR MAISON 1

PROBLEME ***Quelques propriétés de la loi normale***

On rappelle qu'une variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite, notée $\mathcal{N}(0,1)$ si elle admet une densité donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right).$$

1. Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$.
   (a) Quelle est la loi de $Y = aX + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$).
   (b) Calculer, par récurrence, les espérances $\mathbb{E}[X^n]$, $n \geq 1$. En déduire $\text{Var}(X)$.
   (c) On note F_X la fonction de répartition de X. Exprimer $F_X(-t)$ en fonction de $F_X(t)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.
   (d) Soit $Z = X^2 + 2X$. Déterminer la loi de Z.
2. Soient X et Y deux variables indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0,1)$.
   (a) Déterminer la loi de $T = Y/X$. Cette variable admet-elle un espérance ?
   (b) Soit $\rho = \sqrt{X^2 + Y^2}$, et $\theta = \arctan(Y/X)$. Déterminer la loi du couple (ρ, θ). Retrouver la loi de Y/X à partir de la loi de θ.
   (c) Montrer que les variables $X + Y$ et $X - Y$ sont indépendantes.
3. Soit W une variable de loi exponentielle de paramètre $1/2$, et V une variable de loi uniforme sur $[0; 2\pi]$, indépendante de W. Soit $X = \sqrt{W}\cos(V)$ et $Y = \sqrt{W}\sin(V)$. Montrer que X et Y sont deux variables indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0,1)$.

EXERCICE ***(Extrait de l'examen de rattrapage de juin 2011)***

Soit $\lambda > 0$. On considère la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \frac{\lambda^4}{2} x^2 \exp(-\lambda y) \mathbf{1}_{\{0<x<y\}}.$$

1. Vérifier que la fonction f est une densité de probabilité.
2. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité f. Déterminer les lois marginales. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?