Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45 rue des Saints-Pères 75006 Paris
2011-2012 **LICENCE L2**

Probabilités 3

Feuille d'exercices n°5 : Variables aléatoires à densité.

Exercice 1 Soit c un réel. Soit X une variable de densité f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{c}{x^2}\mathbf{1}_{x\in[5;+\infty[}.$$

1. Calculer c.
2. Calculer la fonction de répartition de X.
3. On pose $Y = 1/X$. Quelle est la loi de Y ? On donnera la fonction de répartition de Y et sa densité.
4. Calculer l'espérance $\mathbb{E}[\sqrt{X}]$.

Exercice 2 Soit λ un réel strictement positif. On admet que sa durée de vie T (temps qui sécoule entre l'instant $t = 0$ et l'instant où le noyau se désintègre) est distribuée suivant une loi exponentielle de paramètre λ.

1. Calculer la probabilité que la durée de vie soit comprise entre -3 et 4.
2. Soit $t \in \mathbb{R}$. Calculer la probabilité $F_T(t)$ que la durée de vie soit inférieure ou égale à t. Représenter graphiquement la fonction F_T.
3. Déterminer t_0 tel que l'atome ait 50% de chances d'avoir une durée de vie inférieure à t_0.
4. Soient $t, s > 0$. Vérifier que

$$\mathbb{P}(T > t + s) = \mathbb{P}(T > t)\mathbb{P}(T > s).$$

   Interpréter. On dit que la loi exponentielle est *sans mémoire*.
5. On considère maintenant deux atomes se comportant de façon indépendante. Leurs durées de vies respectives T_1 et T_2 suivent des lois exponentielles de paramètres respectifs λ_1 et λ_2 ($\lambda_1, \lambda_2 > 0$). Soit $Y = \min(T_1, T_2)$. Déterminer la fonction de répartition de Y.

Exercice 3 Soit $a > 0$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{4}{a^2}\left(x\mathbf{1}_{\{x\in[0;a/2[\}} + (a-x)\mathbf{1}_{\{x\in[a/2,a[\}}\right).$$

1. Vérifier que f est bien une densité de probabilité. Dans la suite X désigne une variable aléatoire de densité f.
2. Soit b un réel fixé dans l'intervalle $]0; a/2[$. Soient les évènements,

$$A = \left\{X > \frac{a}{2}\right\},\ \ B = \left\{\frac{a}{2} - b < X \leq \frac{a}{2} + b\right\}.$$

   Les évènements A et B sont-ils indépendants ?
3. Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 4 *Calcul de lois.*

1. Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[a;b]$ avec $0 < a < b$. Calculer la loi de la variable $Y = X^2$, et son espérance.
2. Soit X une variable de loi uniforme sur $[0;1]$ et λ un réel strictement positif. Quelle est la loi de la variable $Y = (-1/\lambda)\ln(1-X)$? Calculer l'espérance $\mathbb{E}[Y]$.
3. Soit X une variable qui suit une loi uniforme sur $[-0.5;0.5]$. Trouver la loi de la variable $Y = \cos(\pi X)$.

Exercice 5 Soit X une variable de fonction de répartition donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \frac{1}{1+\exp(-x)},$$

et soit $Y = \dfrac{\exp(X)+1}{\exp(X)-1}$. Déterminer quelles valeurs prend Y et trouver sa fonction de répartition.

Exercice 6 La loi de Rayleigh est définie par la densité :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0, \\ x\exp(-x^2/2) \text{ sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que f est bien une densité de probabilité.
2. Si X admet f pour densité, déterminer la loi de la variable $Y = X^2$.

Exercice 7 Soit X une variable de loi exponentielle de paramètre λ (réel strictement positif). Trouver la loi de la variable $Y = \lfloor X \rfloor$ (partie entière de X) et de $Z = X - \lfloor X \rfloor$. Montrer que ces deux variables ont des esperances et les calculer.

Exercice 8 Soient $X_0, \ldots, X_n$ des variables suivant une loi uniforme sur $[0;1]$, indépendantes.

1. Soit k un entier tel que $0 \leq k \leq n$ et soit $U_k = \min(X_0, \ldots, X_k)$. Démontrer que U_k admet une densité que l'on déterminera.
2. Soit N une variable suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, 1/2)$. Démontrer que $U = \min(X_0, \ldots, X_N)$ admet une densité que l'on déterminera.