Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45 rue des Saints-Pères 75006 Paris
2011-2012 **LICENCE L2**

Probabilités 3

Feuille d'exercices n°3 : Variables aléatoires sur un espace dénombrable.

Exercice 1 On lance une fois un dé non pipé.

1. On suppose que l'on reçoit 15 euros si on obtient 1, rien si on obteint $2, 3$ ou 4, et 6 euros si on obtient 5 ou 6. Soit G la variable aléatoire égale au gain de ce jeu. Quelle est la loi de G ? Que vaut le gain moyen ?
2. On suppose maintenant qu'on gagne 27 euros pour un 1 et rien sinon. Préfèrez-vous jouer au premier jeu ou à celui-ci ? (Justifiez !)

Exercice 2 On lance trois fois de suite un dé non pipé.

1. Décrire l'espace des observations associé à cette expérience.
2. Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de valeurs distinctes obtenues (par exemple, $X((1, 6, 6)) = 2$ et $X((1, 4, 3)) = 3$). Déterminer la loi de X et son espérance.

Exercice 3 On joue n fois à pile ou face avec une pièce équilibrée. On représente l'expérience par $\Omega_n = \{0, 1\}^n$ ("1" pour pile et "0" pour face). De plus, on gagne $+1$ quand on fait "pile" et on perd -1 quand on fait "face". On note, pour $k = 1, \ldots, n$, S_k la variable égale au nombre de "pile" dans les k premiers lancers, et G_k la variable égale au gain (positif ou négatif) au bout de k lancers.

1. Donner la loi de S_k.
2. (a) Quelles valeurs peut prendre G_k ?
   (b) Montrer que $G_k = 2S_k - k$.
   (c) Montrer que

$$\mathbb{P}(G_k = l) = \begin{cases} \binom{k}{\frac{l+k}{2}} 2^{-k} \text{ si } |h| \leq k \text{ et } k + h \text{ pair,} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Exercice 4 Soient $n \geq 2$ un entier, et X_1, X_2 deux variables définies sur le même espace de probabilité, indépendantes, de même loi uniforme sur l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$. Soient $a \in \{1, 2, \ldots, n\}$ et Y_a la variable définie par

$$\forall \omega \in \Omega,\ Y_a(\omega) = \begin{cases} X_1(\omega) \text{ si } X_2(\omega) \leq a, \\ X_2(\omega) \text{ si } X_2(\omega) > a. \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de Y_a.
2. (a) Calculer $\mathbb{E}[Y_a]$, la comparer à $\mathbb{E}[X_1]$ et justifier que

$$\mathbb{E}[Y_a] = \frac{1}{2n} \left(\frac{5}{4} n^2 + n - \left(a - \frac{n}{2} \right)^2 \right).$$

   (b)En déduire la valeur de a pour laquelle $\mathbb{E}[Y_a]$ est maximale.

Exercice 5 Soit X une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre $p \in]0; 1[$, et $m \in \mathbb{Z}$ une constante. On pose $Y = \min(X, m)$. Quelles valeurs peut prendre Y ? Donner sa loi.

Exercice 6 *(Loi de Pascal ou binômiale négative)* On lance plusieurs fois de suite une pièce de monnaie dont la probabilité de tomber sur "pile" vaut p. Soit X la variable égale au nombre de lancers nécessaires jusqu'à obtenir r fois "pile", avec r fixé à l'avance.

1. Donner la loi de X.
2. Justifier qu'on peut écrire $X = X_1+X_2+\cdots+X_r$ où $X_1, \ldots, X_r$ sont des variables indépendantes et de même loi que l'on précisera. En déduire l'espérance de X.

Exercice 7 Une bactérie a la probabilité p d'être touchée par un laser. On envoie un rayon laser par seconde. La bactérie ne meurt que quand elle est touchée r fois ($r \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$).
Déterminer la loi de X, la variable égale à la durée de vie de la bactérie. Déterminer également son espérance de vie.

Exercice 8 Soit X une variable à valeurs entières de fonction génératrice $G_X : s \mapsto a\exp(1+s^2)$, $a \in \mathbb{R}$.

1. Calculer la valeur de a.
2. Donner la loi de X.
3. Calculer son espérance et sa variance.

Exercice 9 Soit X une variable aléatoire de loi binômiale de paramètres $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et $p \in]0;1[$. Les résultats de X sont affichés sur un compteur, mais celui-ci est détraqué :
- pour $X \neq 0$, le compteur affiche bien X.
- pour $X = 0$, le compteur affiche un nombre choisi au hasard entre 1 et n.

Déterminer la loi de la variable aléatoire Y égale au résultat affiché sur le compteur. Calculer l'espérance de Y et vérifier que $\mathbb{E}[Y] \geq \mathbb{E}[X]$.