Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45 rue des Saints-Pères 75006 Paris
2011-2012 **LICENCE L2**

Probabilités 3

Feuille d'exercices n°1 : Ensembles, coefficients binomiaux, combinatoire.

Exercice 1 Soit Ω un espace d'épreuves, et A, B, C trois évènements de Ω. Exprimer, à l'aide de A, B, C, les évènements suivants.

1. A, B et C se produisent simultanément.
2. L'un des trois évènements au moins se produit.
3. Parmi A, B, C, seul C se produit.
4. Aucun des trois évènements ne se produit.
5. Deux évènements, et pas plus de deux se produisent.
6. Pas plus de deux évènements se produisent.
7. A ou B se réalisent, mais pas ensemble.

Exercice 2 Soit Ω un espace d'épreuves, et E, F, G trois évènements de Ω. On pose

$$A = (E \cup F) \cap G, \quad B = E \cup (F \cap G).$$

1. Parmi les deux évènements A et B, lequel entraîne l'autre.
2. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $A = B$.

Exercice 3 Dans un scrutin où s'affrontent deux candidats, N votes sont émis. L'épreuve consiste à dépouiller le scrutin en ouvrant successivement les N bulletins. Soient A_n, B_n, C_n les évènements

A_n : "le candidat 1 est en tête, quand n bulletins ont été dépouillés."

B_n : "le candidat 1 est en tête quand n bulletins ont été dépouillés et il reste en tête jusqu'au bout."

C_n : "le candidat 1 passe en tête quand n bulletins ont été dépouillés et il reste en tête jusqu'au bout."

1. Donner une relation d'inclusion entre A_n, B_n, C_n.
2. Définir les complémentaires de A_n et B_n. Exprimer B_n en fonction des A_n.
3. Caractériser C_{2k}.
4. Exprimer A_N et B_N en fonction des C_n.

Exercice 4

1. Soit Ω un ensemble de cardinal fini, et A, B, C trois évènements. Montrer que

$$\begin{aligned} \mathrm{Card}(A \cup B \cup C) &= \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) + \mathrm{Card}(C) - \mathrm{Card}(A \cap B) - \mathrm{Card}(A \cap C) \\ &\quad - \mathrm{Card}(B \cap C) + \mathrm{Card}(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

2. *(Application)* Dans un groupe de TD de 30 étudiants, 12 étudiants aiment les maths, 14 la physique, 13 la biologie. De plus, 5 étudiants aiment les maths et la physique, 7 aiment la physique et la biologie, et 4 aiment les maths et la biologie. Sachant qu'il y a trois étudiants qui aiment les trois matières, combien d'étudiants n'aiment ni les maths, ni la physique, ni la biologie ?

Exercice 5 Soit n un entier supérieur ou égal à 1, et p un entier tel que $1 \leq p \leq n$. Montrer les propriétés suivantes, à la fois par le raisonnement et le calcul.

1. $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$,
2. (a) $\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p+1} + \binom{n}{p}$ (Formule de Pascal).
   (b) En déduire $\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n-1}{p} + \cdots + \binom{p+1}{p} + \binom{p}{p}$.
3. (a) $n\binom{n-1}{p-1} = p\binom{n}{p}$. (b) En déduire $\sum_{p=0}^{n} p\binom{n}{p}$.
4. $\binom{n}{p} = \binom{n-2}{p} + 2\binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p-2}$.

Exercice 6 Soient p, q deux entiers supérieurs ou égaux à 1, et n un entier tel que $n \leq p$, et $n \leq q$.

1. Montrer que $\binom{p+q}{n} = \sum_{j=0}^{n} \binom{p}{j}\binom{q}{n-j}$. *Indication :* On pourra faire un raisonnement purement combinatoire, ou bien développer de deux façons le produit $(1+x)^{p+q}$, $x \in \mathbb{R}$.
2. En déduire des expressions simples de $\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}^2$ et $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}^2$.

Exercice 7 Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Calculer les sommes suivantes :

$$S = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}, \quad A = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k}, \quad B = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1}.$$

Exercice 8 On a 10 livres à ranger sur une étagère.

1. Combien y a-t-il de configurations possibles ?
2. Parmi les 10 livres, trois sont écrits par un même auteur. Combien y a-t-il de configurations dans lesquelles ces trois livres sont rangés à côté ?
3. Généraliser à n livres ($n \geq 1$), dont k livres du même auteur ($1 \leq k \leq n$).

Exercice 9 Soit Ω un ensemble de cardinal fini de cardinal $n \geq 1$. Soit A une partie de Ω, de cardinal p ($1 \leq p \leq n$).

1. Quel est le nombre de parties de Ω à k éléments contenant exactement un élément de A ?
2. Quel est le nombre de parties de Ω à k éléments contenant au moins un élément de A ?

Exercice 10 On tire 5 cartes dans un jeu de 32 cartes, sans remise.

1. Combien de mains possibles y a-t-il ?
2. Combien y a-t-il de mains contenant
   (a) deux dames ?
   (b) au plus deux dames ?
   (c) deux cartes de même couleur ?

Exercice 11 On tire 5 lettres avec remise dans un alphabet comportant les 26 lettres.

1. Combien de mots sont-ils possibles ?
2. Combien y-a-t-il de mots comportant
   (a) deux A ?
   (b) au moins trois A ?
   (c) deux voyelles et un Z ?