M.P.S.I., Colles, Semaine 7, Sujet 1.

EX 1.
Représenter la courbe paramétrée suivante de $\mathbb{R}^2$ (on étudiera son comportement au voisinage de points singuliers éventuels, les branches infinies...) :

$$\begin{cases} x(t) = 2t + \frac{1}{2t+1} \\ y(t) = t^2 - \frac{1}{2t+1} \end{cases}$$

EX 2.
1. Rappeler l'expression de l'aire $\mathcal{A}$ d'un triangle ABC de l'espace à l'aide du produit vectoriel.
2. (Théorème de Descartes) Soit $OABC$ trièdre rectangle de l'espace, c'est à dire que les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ sont orthogonaux deux à deux. Montrer que

$$\mathcal{A}(ABC)^2 = \mathcal{A}(OAB)^2 + \mathcal{A}(OBC)^2 + \mathcal{A}(OCA)^2.$$

M.P.S.I., Colles, Semaine 7, Sujet 2.

EX 1.
Représenter la courbe paramétrée suivante de $\mathbb{R}^2$ (on étudiera son comportement au voisinage de points singuliers éventuels, les branches infinies...) :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{t^2+1}{2t} \\ y(t) = \frac{2t-1}{t^2} \end{cases}$$

On montrera aussi l'existence d'un polynôme P de degré 2 tel que $\lim_{n\to\infty} y(t) - P(x(t)) = 0$. On en déduira l'existence d'une parabole asymptote que l'on représentera sur le même dessin.

EX 2.
Soient $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{d}$ quatre vecteurs de l'espace. Montrer que

$$\det(\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}, \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{c}, \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{d}) = 0.$$

M.P.S.I., Colles, Semaine 7, Sujet 3.

EX 1.
Représenter la courbe paramétrée suivante de $\mathbb{R}^2$ (on étudiera son comportement au voisinage de points singuliers éventuels, les branches infinies...) :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{2t}{1+t^3} \\ y(t) = \frac{2t^2}{1+t^3} \end{cases}$$

On montrera aussi que la tangente au point $M(t)$ avec $t = 1$ est orthogonale à la droite d'équation $y = x$.

EX 2.
On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
Soient deux vecteurs $\overrightarrow{u}(1, -1, 2)$ et $\overrightarrow{v}(5, 0, 1)$.
1. Déterminer un vecteur $\overrightarrow{n}$ orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
2. Ecrire l'équation du plan $\mathcal{P}$ parallèle à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et contenant O.
3. Déterminer le projeté orthogonal H du point $A(2, -1, 1)$ sur $\mathcal{P}$.

M.P.S.I., Colles, Semaine 7, Sujet 1.

EX 1.
Représenter la courbe paramétrée suivante de $\mathbb{R}^2$ (on étudiera son comportement au voisinage de points singuliers éventuels, les branches infinies...) :

$$\begin{cases} x(t) = 2t + \frac{1}{2t+1} \\ y(t) = t^2 - \frac{1}{2t+1} \end{cases}$$

EX 2.
1. Rappeler l'expression de l'aire $\mathcal{A}$ d'un triangle ABC de l'espace à l'aide du produit vectoriel.
2. (Théorème de Descartes) Soit $OABC$ trièdre rectangle de l'espace, c'est à dire que les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ sont orthogonaux deux à deux. Montrer que

$$\mathcal{A}(ABC)^2 = \mathcal{A}(OAB)^2 + \mathcal{A}(OBC)^2 + \mathcal{A}(OCA)^2.$$

M.P.S.I., Colles, Semaine 7, Sujet 2.

EX 1.
Représenter la courbe paramétrée suivante de $\mathbb{R}^2$ (on étudiera son comportement au voisinage de points singuliers éventuels, les branches infinies...) :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{t^2+1}{2t} \\ y(t) = \frac{2t-1}{t^2} \end{cases}$$

On montrera aussi l'existence d'un polynôme P de degré 2 tel que $\lim_{n\to\infty} y(t) - P(x(t)) = 0$. On en déduira l'existence d'une parabole asymptote que l'on représentera sur le même dessin.

EX 2.
Soient $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{d}$ quatre vecteurs de l'espace. Montrer que

$$\det(\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}, \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{c}, \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{d}) = 0.$$

M.P.S.I., Colles, Semaine 7, Sujet 3.

EX 1.
Représenter la courbe paramétrée suivante de $\mathbb{R}^2$ (on étudiera son comportement au voisinage de points singuliers éventuels, les branches infinies...) :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{2t}{1+t^3} \\ y(t) = \frac{2t^2}{1+t^3} \end{cases}$$

On montrera aussi que la tangente au point $M(t)$ avec $t = 1$ est orthogonale à la droite d'équation $y = x$.

EX 2.
On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
Soient deux vecteurs $\overrightarrow{u}(1, -1, 2)$ et $\overrightarrow{v}(5, 0, 1)$.
1. Déterminer un vecteur $\overrightarrow{n}$ orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
2. Ecrire l'équation du plan $\mathcal{P}$ parallèle à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et contenant O.
3. Déterminer le projeté orthogonal H du point $A(2, -1, 1)$ sur $\mathcal{P}$.