EX 1.
Donner la forme générale des solutions complexes, puis réelles, de la récurrence linéaire d'ordre 2 :

$$\forall n \geq 1,\ u_{n+1} = 2u_n - 2u_{n-1}.$$

EX 2.
On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
Soit $\mathcal{P}_\lambda$ le plan d'équation $2x + 2y - z + \lambda = 0$, où $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit aussi $\mathcal{S}$ l'ensemble d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 2y + 9/4 = 0$.
1. Montrer que $\mathcal{S}$ est une sphère dont on précisera le rayon ainsi que les coordonnées du centre noté I.
2. Décrire l'intersection de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{P}_\lambda$, en fonction des valeurs de λ.
3. Dans le cas $\lambda = 2$, donner les coordonnées du point H, intersection de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{P}_\lambda$.
4. Dans le cas où $\lambda \in]-4; 2[$, trouver le rayon du cercle $\mathcal{S} \cap \mathcal{P}_\lambda$.

EX 3.
Soient $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}$ quatre vecteurs de l'espace. Montrer que

$$\det(\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}, \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{c}, \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{d}) = 0.$$

M.P.S.I., Colles, Semaine 6, Sujet 2.

EX 1.
Donner la forme générale des solutions réelles de la récurrence linéaire d'ordre 2 :

$$\forall n \geq 0,\ u_{n+2} = u_{n+1} - u_n,\ \text{ et } u_0 = 1,\ u_1 = 2.$$

EX 2.
On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
La question 3 ne dépend pas des deux autres.
1. (Cours) Soit $\mathcal{P}$ un plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$ connus). Donner les coordonnées d'un vecteur normal au plan, et le démontrer.
2. Soit $\mathcal{P}_\lambda$ le plan d'équation $2x - 3y + z - 5 = 0$. Déterminer un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$, et les coordonnées de H, projeté orthogonal de O sur le plan.
3. Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x = 3 + 3\lambda, \\ y = 1 + \lambda, \\ z = 1 - \lambda. \end{cases} \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}$$

est contenue dans le plan $\mathcal{P}$ d'équations

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu, \\ y = 1 - \lambda + \mu, \\ z = 1 + \lambda - \mu, \end{cases} \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

EX 3.
1. Rappeler l'expression de l'aire $\mathcal{A}$ d'un triangle ABC de l'espace à l'aide du produit vectoriel.
2. (Théorème de Descartes) Soit $OABC$ trièdre rectangle de l'espace, c'est à dire que les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ sont orthogonaux deux à deux. Montrer que

$$\mathcal{A}(ABC)^2 = \mathcal{A}(OAB)^2 + \mathcal{A}(OBC)^2 + \mathcal{A}(OCA)^2.$$

M.P.S.I., Colles, Semaine 6, Sujet 3.

EX 1.
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Donner la forme générale des solutions réelles de la récurrence linéaire d'ordre 2 :

$$\forall n \geq 0,\ u_{n+2} - 2\cos(\theta)u_{n+1} + u_n = 0 \text{ et } u_0 = u_1 = 1.$$

EX 2.
On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
Soient deux vecteurs $\overrightarrow{u}(1, -1, 2)$ et $\overrightarrow{v}(5, 0, 1)$.
1. Déterminer un vecteur $\overrightarrow{n}$ orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
2. Ecrire l'équation du plan $\mathcal{P}$ parallèle à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et contenant O.
3. Déterminer le projeté orthogonal H du point $A(2, -1, 1)$ sur $\mathcal{P}$.

EX 3.
(Puissance d'un point par rapport à une sphère) Soit $\mathcal{S}$ une sphère de rayon R et de centre O, et M un point de l'espace. Soit $\mathcal{D}$ une droite passant par M et coupant la sphère en deux points A et B.
1. Montrer que le produit scalaire $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ ne dépend que de M et de $\mathcal{S}$ et pas de A et B. Donner l'expression de ce produit en fonction de MO et R.
2. Préciser le signe de $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ en fonction de la position de M par rapport à $\mathcal{S}$.