M.P.S.I., Colles, Semaine 30, Sujet 1.

EX 1.
Soient E un espace euclidien, F un sous espace vectoriel de E. Soient u un automorphisme orthogonal de F, v un automorphisme orthogonal de $F^{\perp}$, et p la projection orthogonale sur F. On définit, quel que soit $x \in E$,

$$f(x) = u(p(x)) + v(x - p(x)).$$

1. Montrer que f est un endormorphisme de E.
2. Montrer que f est un endomorphisme orthogonal.

EX 2.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Calculer A^2, et décrire f (de quel type d'application linéaire s'agit-il, et quels sont ces éléments caractéristiques).
EX 3.
Soit $\mathcal{F}$ une partie d'un espace affine. Montrer que $\mathcal{F}$ est un sous espace affine si et seulement si tout barycentre de points de $\mathcal{F}$ est encore dans $\mathcal{F}$.

M.P.S.I., Colles, Semaine 30, Sujet 2.

EX 1.
Soient E un espace euclidien, $u \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit, pour tout $x \in E$, $f(x) = x + \lambda\langle x, u\rangle u$.
1. Montrer que f est un endormorphisme de E.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ et u pour que f soit un endomorphisme orthogonal. Décrire f dans ce cas.

EX 2.
Soient A, B, C trois points d'un espace affine, $\alpha, \beta\gamma$ trois réels tels que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$. Soit G le barycentre de (A, α), (B, β), et (C, γ). Montrer que (AG) est parallèle à (BC) si et seulement si $\beta + \gamma = 0$.
EX 3.
Soit $A = (a_{i,j})_{i,j \in \{1,\ldots,n\}}$ une matrice orthogonale. Montrer les deux inégalités suivantes :

$$\left| \sum_{i,j=1,\ldots,n} a_{i,j} \right| \leq n, \qquad \sum_{i,j=1,\ldots,n} |a_{i,j}| \leq n\sqrt{n}.$$

M.P.S.I., Colles, Semaine 30, Sujet 3.

EX 1.
Soient E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$.
1. On suppose que pour tout $x, y \in E$, $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$. Montrer que la matrice de f dans une base orthonormée est symétrique.
2. Réciproquement, si la matrice de f dans une base orthonormée est symétrique, montrer qu'elle l'est dans toute base orthonormée, puis que pour tout $x, y \in E$, $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$.
EX 2.
Soit f une application affine d'un espace affine $\mathcal{E}$ et $\vec{f}$ l'application linéaire sous jacente à f.
1. Montrer que l'ensemble des points fixes de f est soit vide, soit un sous espace affine de direction $\mathrm{Ker}(\vec{f} - id)$.
2. Montrer que si $\vec{f} - id$ est bijective, f a un unique point fixe.