M.P.S.I., Colles, Semaine 29, Sujet 1.

EX 1.
On définit l'application S : pour tout $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]$, $S(P,Q) = \displaystyle\int_0^1 P(x)Q(x)dx$.
1. Montrer que S est un produit scalaire.
2. Donner une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.
3. Calculer

$$\min_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx.$$

Indication : traduire le problème en terme de distance à un sous-espace.

EX 2.
On définit l'application $\varphi : (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \mapsto Tr(AB^t)$.
1. Montrer que φ est un produit scalaire. On note $\|.\|$ la norme associée.
2. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $|Tr(A)| \leq \sqrt{n}\|A\|$.

M.P.S.I., Colles, Semaine 29, Sujet 2.

EX 1.
Soit $E = C^0([0;1],\mathbb{R})$. On définit pour $f,g \in E$, $\langle f,g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)dt$.
1. Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire.
2. Soit $f \in E$, et pour $n \geq 1$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 f^n(t)dt$. Montrer que $I_n^2 \leq I_{n-1}I_{n+1}$.
3. Calculer le minimum de l'ensemble

$$\left\{ \int_0^1 f^2(t)dt,\ f \in E, \int_0^1 f(t)dt = 1 \right\}.$$

EX 2.
Soient $(E, \langle ., .\rangle)$ espace euclidien, et $p \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence entre les deux assertions suivantes :
1. p est un projecteur orthogonal.
2. $p \circ p = p$ et $\forall x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$.

M.P.S.I., Colles, Semaine 29, Sujet 3.

EX 1.
On définit sur $\mathbb{R}^3$ l'application

$$S:\ (x,y,z),(x',y',z') \mapsto xx' + yy' + zz' + \frac{1}{2}(xy' + x'y + xz' + x'z + yz' + y'z).$$

1. Montrer que S est un produit scalaire, donner la norme associée.
2. Appliquer le procédé d'orthonormalisation à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

EX 2.
Soit $\varphi : (P,Q) \in \mathbb{R}_2[X] \mapsto P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0) + P''(0)Q''(0)$.
1. Montrer que φ est un produit scalaire.
2. Soit $F = \text{Vect}(1 + X + X^2, 1 - X + X^2)$. Décrire l'espace $F^\perp$.

M.P.S.I., Colles, Semaine 29, Sujet 1.

EX 1.
On définit l'application S : pour tout $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]$, $S(P,Q) = \displaystyle\int_0^1 P(x)Q(x)dx$.
1. Montrer que S est un produit scalaire.
2. Donner une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.
3. Calculer

$$\min_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx.$$

Indication : traduire le problème en terme de distance à un sous-espace.

EX 2.
On définit l'application $\varphi : (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \mapsto Tr(AB^t)$.
1. Montrer que φ est un produit scalaire. On note $\|.\|$ la norme associée.
2. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $|Tr(A)| \leq \sqrt{n}\|A\|$.

M.P.S.I., Colles, Semaine 29, Sujet 2.

EX 1.
Soit $E = C^0([0;1],\mathbb{R})$. On définit pour $f,g \in E$, $\langle f,g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)dt$.
1. Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire.
2. Soit $f \in E$, et pour $n \geq 1$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 f^n(t)dt$. Montrer que $I_n^2 \leq I_{n-1}I_{n+1}$.
3. Calculer le minimum de l'ensemble

$$\left\{ \int_0^1 f^2(t)dt,\ f \in E, \int_0^1 f(t)dt = 1 \right\}.$$

EX 2.
Soient $(E, \langle ., .\rangle)$ espace euclidien, et $p \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence entre les deux assertions suivantes :
1. p est un projecteur orthogonal.
2. $p \circ p = p$ et $\forall x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$.

M.P.S.I., Colles, Semaine 29, Sujet 3.

EX 1.
On définit sur $\mathbb{R}^3$ l'application

$$S:\ (x,y,z),(x',y',z') \mapsto xx' + yy' + zz' + \frac{1}{2}(xy' + x'y + xz' + x'z + yz' + y'z).$$

1. Montrer que S est un produit scalaire, donner la norme associée.
2. Appliquer le procédé d'orthonormalisation à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

EX 2.
Soit $\varphi : (P,Q) \in \mathbb{R}_2[X] \mapsto P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0) + P''(0)Q''(0)$.
1. Montrer que φ est un produit scalaire.
2. Soit $F = \text{Vect}(1 + X + X^2, 1 - X + X^2)$. Décrire l'espace $F^\perp$.