M.P.S.I., Colles, Semaine 26, Sujet 1.

EX 1.
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ tel que la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}_e = (e_1, e_2)$ de $\mathbb{R}^2$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Soient f_1, et f_2 les vecteurs de coordonnées $(1, -1)$ et $(1, 1)$ dans la base canonique. Justifier brièvement que $\mathcal{B}_f = (f_1, f_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Donner les coordonnées dans cette base du vecteur u de coordonnées $(2, 3)$ dans la base canonique.
3. Donner la matrice de f dans cette base.

EX 2.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimension finie $2n$ ($n \geq 1$). Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = 0$, et tel qu'il existe une famille de n vecteurs de E, $(a_1, \ldots, a_n)$ telle que $\dim \mathrm{Vect}\{f(a_1), \ldots, f(a_n)\} = n$.
1. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f)$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Vect}\{a_1, \ldots, a_n\}$ sont supplémentaires dans E.

EX 3.
Soit $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (z, x - y, y + z)$. Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

M.P.S.I., Colles, Semaine 26, Sujet 2.

EX 1.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimension finie. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Les deux questions sont indépendantes.
1. On suppose que $f + g$ est bijectif et $g \circ f = 0$. Montrer que $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) = \dim(E)$.
2. On suppose que $f + g = id_E$, et $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) = \dim(E)$. Montrer que f et g sont des projecteurs associés.

EX 2.
On considère les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_1(x) = e^x \quad f_2(x) = e^{-x} \quad f_3(x) = \cosh(x) \quad f_4(x) = \sinh(x).$$

1. Montrer que $\mathcal{B} = (f_1, f_2)$ et $\mathcal{B}' = (f_3, f_4)$ forment deux bases du même sous espace vectoriel F de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. Donner la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et celle de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

EX 3.
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que $f^2 = 0$. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}^3$ et φ une forme linéaire de $\mathbb{R}^3$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, $f(x) = \varphi(x)a$.

M.P.S.I., Colles, Semaine 26, Sujet 3.

EX 1.
Soient $\mathcal{B}_e = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}_f = (f_1, f_2)$ une base de $\mathbb{R}^2$. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ tel que la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_e$ et $\mathcal{B}_f$ est

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Que vaut $f(e_1 + 2e_2)$?
2. Soient $e'_1 = e_2 + e_3$, $e'_2 = e_3 + e_1$ et $e'_3 = e_1 + e_2$. Justifier que $\mathcal{B}'_e = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
Soient $f'_1 = (f_1 + f_2)/2$ et $f'_2 = (f_1 - f_2)/2$. Justifier de même que $\mathcal{B}'_f = (f'_1, f'_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
3. Donner la matrice M' de f dans ces nouvelles bases.

EX 2.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{rg} f^2 = \mathrm{rg}(f)$.
1. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$ et $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont supplémentaires dans E.

EX 3.
Soit E un espace vectoriel de dimension n. Soit φ une forme linéaire non nulle de E. Soit $u \in E \setminus \mathrm{Ker}\varphi$ Montrer que $\mathrm{Vect}(u)$ et $\mathrm{Ker}\varphi$ sont supplémentaires dans E.