M.P.S.I., Colles, Semaine 21, Sujet 1.

EX 1.
(Question de cours) Soit f une fonction réelle de limite l en un point $a \in \mathbb{R}$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{R}}$ une suite de points du domaine de définition de f (noté $\mathcal{D}_f$) telle que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Montrer que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $f(a)$.
EX 2.
1. Calculer la limite en 0 des fonctions f_0, f_1 et f_2 définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par les expressions suivantes :

$$f_0(x) = E\left(\frac{1}{x}\right),\ f_1(x) = xE\left(\frac{1}{x}\right),\ f_2(x) = x^2E\left(\frac{1}{x}\right).$$

2. Calculer la limite en 0 de $g(x) = (\cos(x))^{1/x^2}$.
EX 3.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue en 0 telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(2x) = f(x)$. Montrer que f est constante.

M.P.S.I., Colles, Semaine 21, Sujet 2.

EX 1.
(Question de cours) Soient f, g deux fonctions réelles définies sur une partie $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$. On suppose g bornée au voisinage de a et $\lim_{x\to a} f(x) = 0$. Montrer que $\lim_{x\to a} fg(x) = 0$.
EX 2.
Soit f une fonction périodique qui admet une limite finie l en $+\infty$. Montrer que f est constante. En déduire que la fonction sin n'a pas de limite en $+\infty$.
EX 3.
1. Etudier les points de continuité, les limites à droites et à gauche en les points de discontinuité de la fonction suivante définie sur $\mathbb{R}_+^*$: $f(x) = x^2E\left(\frac{1}{x}\right)$.
2. Calculer la limite en 0 de $g(x) = x(3+x)\dfrac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}\sin(\sqrt{x})}$.

M.P.S.I., Colles, Semaine 21, Sujet 3.

EX 1.
(Question de cours) Soit f une fonction réelle définie au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}$. On suppose $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$. Montrer que f ne s'annule pas au voisinage de a et que $\lim_{x\to a} 1/f(x) = 0$.
EX 2.
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que la suite $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers ∞. Montrer qu'alors $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.
EX 3.
1. Etudier la continuité en 1 de la fonction $g(x) = \dfrac{E(\sqrt{x^3+3})}{x^2-2x+5}$.
2. Calculer la limite en 0 de $h(x) = \dfrac{(1-\cos(x))\arctan(x)}{x\tan(x)}$.

M.P.S.I., Colles, Semaine 21, Sujet 1.

EX 1.
(Question de cours) Soit f une fonction réelle de limite l en un point $a \in \mathbb{R}$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{R}}$ une suite de points du domaine de définition de f (noté $\mathcal{D}_f$) telle que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Montrer que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $f(a)$.
EX 2.
1. Calculer la limite en 0 des fonctions f_0, f_1 et f_2 définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par les expressions suivantes :

$$f_0(x) = E\left(\frac{1}{x}\right),\ f_1(x) = xE\left(\frac{1}{x}\right),\ f_2(x) = x^2E\left(\frac{1}{x}\right).$$

2. Calculer la limite en 0 de $g(x) = (\cos(x))^{1/x^2}$.
EX 3.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue en 0 telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(2x) = f(x)$. Montrer que f est constante.

M.P.S.I., Colles, Semaine 21, Sujet 2.

EX 1.
(Question de cours) Soient f, g deux fonctions réelles définies sur une partie $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$. On suppose g bornée au voisinage de a et $\lim_{x\to a} f(x) = 0$. Montrer que $\lim_{x\to a} fg(x) = 0$.
EX 2.
Soit f une fonction périodique qui admet une limite finie l en $+\infty$. Montrer que f est constante. En déduire que la fonction sin n'a pas de limite en $+\infty$.
EX 3.
1. Etudier les points de continuité, les limites à droites et à gauche en les points de discontinuité de la fonction suivante définie sur $\mathbb{R}_+^*$: $f(x) = x^2E\left(\frac{1}{x}\right)$.
2. Calculer la limite en 0 de $g(x) = x(3+x)\dfrac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}\sin(\sqrt{x})}$.

M.P.S.I., Colles, Semaine 21, Sujet 3.

EX 1.
(Question de cours) Soit f une fonction réelle définie au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}$. On suppose $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$. Montrer que f ne s'annule pas au voisinage de a et que $\lim_{x\to a} 1/f(x) = 0$.
EX 2.
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que la suite $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers ∞. Montrer qu'alors $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.
EX 3.
1. Etudier la continuité en 1 de la fonction $g(x) = \dfrac{E(\sqrt{x^3+3})}{x^2-2x+5}$.
2. Calculer la limite en 0 de $h(x) = \dfrac{(1-\cos(x))\arctan(x)}{x\tan(x)}$.