

EX 1.

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $F = \frac{X^2 + 2X + 5}{X^2 - 3X + 2}$.

EX 2.

Soit $F \in \mathbb{C}(X)$. On écrit $F = P/Q$ où P et Q sont premiers entre eux. Montrer que F est paire si et seulement si P et Q sont tous deux pairs, ou tous deux impairs.

EX 3.

Soit $n \geq 2$. On note pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$, $\omega_k = \exp(2ik\pi/n)$, et la fraction rationnelle

$$F = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{X - \omega_k}.$$

Ecrire la réduction au même dénominateur de F , c'est à dire écrire F sous la forme P/Q , où P et Q sont des polynômes.

EX 1.

Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

$$1. F = \frac{X^2 + 1}{X^3 - 6X^2 + 11X - 6}.$$

$$2. F = \frac{n!}{X(X-1)\cdots(X-n)}, \text{ où } n \text{ est un entier plus grand que } 1.$$

EX 2.

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Soit $\omega = \exp(2i\pi/n)$.

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(\omega X) = P(X)$. Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(X) = Q(X^n)$.

2. Soit la fraction rationnelle

$$F = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{X + \omega^k}{X - \omega^k}.$$

Ecrire la réduction au même dénominateur de F , c'est à dire écrire F sous la forme R/Q , où R et Q sont des polynômes.

EX 1.

Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

$$1. F = \frac{1}{X^2 + X + 1}.$$

$$2. F = \frac{X^{n-1}}{X^n - 1}, \text{ où } n \text{ est un entier plus grand que } 1.$$

EX 2.

Soient p, q deux entiers naturels premiers entre eux. Soit la fraction rationnelle

$$F = \frac{X^p - 1}{X^q - 1}.$$

Quelles sont les racines et les pôles de F ?

EX 1.

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $F = \frac{X^2 + 2X + 5}{X^2 - 3X + 2}$.

EX 2.

Soit $F \in \mathbb{C}(X)$. On écrit $F = P/Q$ où P et Q sont premiers entre eux. Montrer que F est paire si et seulement si P et Q sont tous deux pairs, ou tous deux impairs.

EX 3.

Soit $n \geq 2$. On note pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$, $\omega_k = \exp(2ik\pi/n)$, et la fraction rationnelle

$$F = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{X - \omega_k}.$$

Ecrire la réduction au même dénominateur de F , c'est à dire écrire F sous la forme P/Q , où P et Q sont des polynômes.

EX 1.

Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

$$1. F = \frac{X^2 + 1}{X^3 - 6X^2 + 11X - 6}.$$

$$2. F = \frac{n!}{X(X-1)\cdots(X-n)}, \text{ où } n \text{ est un entier plus grand que } 1.$$

EX 2.

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Soit $\omega = \exp(2i\pi/n)$.

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(\omega X) = P(X)$. Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(X) = Q(X^n)$.

2. Soit la fraction rationnelle

$$F = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{X + \omega^k}{X - \omega^k}.$$

Ecrire la réduction au même dénominateur de F , c'est à dire écrire F sous la forme R/Q , où R et Q sont des polynômes.

EX 1.

Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

$$1. F = \frac{1}{X^2 + X + 1}.$$

$$2. F = \frac{X^{n-1}}{X^n - 1}, \text{ où } n \text{ est un entier plus grand que } 1.$$

EX 2.

Soient p, q deux entiers naturels premiers entre eux. Soit la fraction rationnelle

$$F = \frac{X^p - 1}{X^q - 1}.$$

Quelles sont les racines et les pôles de F ?