M.P.S.I., Colles, Semaine 18, Sujet 1.

EX 1.
Trouver un équivalent de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = n\left(n^{1/n} - 1\right)$.
EX 2.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par : $v_n = \dfrac{u_1 + \cdots + u_n}{n}$. Le but des trois premières questions est de montrer que si (u_n) converge vers l, alors (v_n) aussi. On suppose $l = 0$ pour simplifier, et on fixe $\epsilon > 0$.
1. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq n_0$,

$$\left|\frac{u_{n_0} + u_{n_0+1} + \cdots + u_n}{n}\right| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

2. Montrer qu'il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq n_1$,

$$\left|\frac{u_1 + \cdots + u_{n_0-1}}{n}\right| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

3. En déduire le résultat annoncé.
4. Montrer, en raisonnant par l'absurde que la suite $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge (si elle convergeait vers l, montrer qu'alors $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergerait vers 0, puis que $l^2 = 1$...).
5. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin k = 0,$$

et conclure que la réciproque du résultat de la question 3− est fausse.

M.P.S.I., Colles, Semaine 18, Sujet 2.

EX 1.
Trouver un équivalent de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \dfrac{n^{n+1}}{(n+1)^n}$.
EX 2.
On considère la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $w_0 = 1/2$, et par la relation de récurrence, valable pour $n \geq 1$, $w_n = (1 - w_{n-1})^2$. Etudier la suite (w_n) (on pourra commencer par montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n \in [0; 1]$).
EX 3.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dont tous les termes sont des entiers. Montrer que si (u_n) converge, alors elle est stationnaire.

M.P.S.I., Colles, Semaine 18, Sujet 3.

EX 1.
Trouver un équivalent de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = n^2\left[(n+1)^{1/n} - n^{1/n}\right]$.
EX 2.
On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_0 = 0$, et par la relation de récurrence, valable pour $n \geq 1$, $v_n = \dfrac{u_{n-1} + 1}{u_{n-1} + 2}$. Etudier la suite (v_n) (on pourra commencer par montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \in [0; 1]$).
EX 3.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère les deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = \frac{E(10^n x)}{10^n} \text{ et } y_n = \frac{E(10^n x) + 1}{10^n}.$$

Montrer que les deux suites sont adjacentes et trouver leur limite commune.