M.P.S.I., Colles, Semaine 17, Sujet 1.

EX 1.
(Question de cours) Montrer l'unicité de la limite d'une suite.
EX 2.
Soient $0 < p < q$ deux réels. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies par a_0 et b_0, tels que $a_0 < b_0$ et pour $n \geq 1$,

$$a_n = \frac{pa_{n-1} + qb_{n-1}}{p+q} \text{ et } b_n = \frac{qa_{n-1} + pb_{n-1}}{p+q}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $q_n < b_n$.
2. Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et déterminer leur limite.

EX 3.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dont tous les termes sont des entiers. On suppose que (u_n) est convergente. Montrer qu'alors, elle est stationnaire.

M.P.S.I., Colles, Semaine 17, Sujet 2.

EX 1.
(Question de cours) Soit $m \in \mathbb{R}$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite réelle convergeant vers une limite $l > m$. Montrer qu'il existe un rang n_0 tel que pour $n \geq n_0$, $u_n \geq m$.
EX 2.
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites définies pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{nn!}.$$

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
2. En raisonnant par l'absurde, montrer que leur limite est irrationnelle (NB : on peut en fait montrer que cette limite est $e-1$).
3. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{ak+b}{k!}$. Donner la limite de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

EX 3.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée telle que $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. Montrer que le produit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

M.P.S.I., Colles, Semaine 17, Sujet 3.

EX 1.
(Question de cours) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. Montrer que $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.
EX 2.
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par

$$\forall n \geq 1,\ a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n).$$

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\dfrac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln(n) < \dfrac{1}{n}$.
2. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. En déduire que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

EX 3.
Montrer qu'une suite non majorée admet une suite extraite qui diverge vers $+\infty$.

M.P.S.I., Colles, Semaine 17, Sujet 1.

EX 1.
(Question de cours) Montrer l'unicité de la limite d'une suite.
EX 2.
Soient $0 < p < q$ deux réels. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies par a_0 et b_0, tels que $a_0 < b_0$ et pour $n \geq 1$,

$$a_n = \frac{pa_{n-1} + qb_{n-1}}{p+q} \text{ et } b_n = \frac{qa_{n-1} + pb_{n-1}}{p+q}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $q_n < b_n$.
2. Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et déterminer leur limite.

EX 3.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dont tous les termes sont des entiers. On suppose que (u_n) est convergente. Montrer qu'alors, elle est stationnaire.

M.P.S.I., Colles, Semaine 17, Sujet 2.

EX 1.
(Question de cours) Soit $m \in \mathbb{R}$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite réelle convergeant vers une limite $l > m$. Montrer qu'il existe un rang n_0 tel que pour $n \geq n_0$, $u_n \geq m$.
EX 2.
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites définies pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{nn!}.$$

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
2. En raisonnant par l'absurde, montrer que leur limite est irrationnelle (NB : on peut en fait montrer que cette limite est $e-1$).
3. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{ak+b}{k!}$. Donner la limite de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

EX 3.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée telle que $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. Montrer que le produit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

M.P.S.I., Colles, Semaine 17, Sujet 3.

EX 1.
(Question de cours) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. Montrer que $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.
EX 2.
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par

$$\forall n \geq 1,\ a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n).$$

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\dfrac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln(n) < \dfrac{1}{n}$.
2. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. En déduire que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

EX 3.
Montrer qu'une suite non majorée admet une suite extraite qui diverge vers $+\infty$.