M.P.S.I., Colles, Semaine 16, Sujet 1.

EX 1.
1. Soient A, B deux parties de $\mathbb{R}$, non vides et bornées telles que $A \subset B$. Comparer $\inf A, \sup A, \inf B, \sup B$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée. Soit, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \sup\{u_p,\, p \geq n\}$, et $v_n = \inf\{u_p,\, p \geq n\}$. Etudier la monotonie de chacune de ces deux suites.

EX 2.
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} E\left(x + \frac{k}{n}\right) = E(nx)$.

EX 3.
Soient k un entier supérieur ou égal à 1. et $(\alpha_k)_{k=1,\ldots,n}$ des réels tels que $0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n$. On pose pour tout $x \in]0;1[$ et pour $k \in \{1,\ldots,n\}$, $f_k(x) = x^{\alpha_k}$. Montrer que la famille de fonctions $(f_k)_{k\in\{1,\ldots,n\}}$ est libre.

M.P.S.I., Colles, Semaine 16, Sujet 2.

EX 1.
Les deux questions sont indépendantes.
1. Soient A, B deux parties de $\mathbb{R}$, non vides et majorées. Montrer que $A \cup B$ admet une borne supérieure et que $\sup(A \cup B) = max(\sup(A), \sup(B))$.
2. Justifier l'existence et calculer :

$$\inf\left\{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right),\, x_1, \ldots, x_n > 0\right\},$$

où n est un entier naturel pair non nul.

EX 2.
Soient $a \leq b$ deux nombres réels. Montrer que $card([a,b] \cap \mathbb{Z}) = E(b) + E(1-a)$. On distinguera les cas $a \in \mathbb{Z}$ et $a \notin \mathbb{Z}$.

EX 3.
Soient E, F deux espaces vectoriels, et $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
1. Montrer que $Ker(f) \subset Ker(f^2)$.
2. Montrer que $Ker(f) = Ker(f^2)$ si et seulement si $Im(f) \cap Ker(f) = \{0\}$.

M.P.S.I., Colles, Semaine 16, Sujet 3.

EX 1.
Les deux questions sont indépendantes.
1. Soient A, B deux parties de $\mathbb{R}$, non vides et majorées. On note $A + B = \{a + b,\, (a,b) \in A \times B\}$. Montrer que $A + B$ admet une borne supérieure et que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.
2. Justifier l'existence et calculer :

$$\inf\left\{(-1)^n + \frac{1}{n+1},\, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

EX 2.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
1. Montrer qu'il existe $(a_n, b_n) \in \mathbb{N}^*$, tel que $(2+\sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}$ et $3b_n^2 = a_n^2 - 1$.
2. Montrer que $E((2+\sqrt{3})^n)$ est un entier impair.

EX 3.
Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Soit $U \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$, définie par $U(P)(X) = P(X+1)$ pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Donner la matrice de U dans la base $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$, ainsi que son inverse.

M.P.S.I., Colles, Semaine 16, Sujet 1.

EX 1.
1. Soient A, B deux parties de $\mathbb{R}$, non vides et bornées telles que $A \subset B$. Comparer $\inf A, \sup A, \inf B, \sup B$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée. Soit, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \sup\{u_p,\, p \geq n\}$, et $v_n = \inf\{u_p,\, p \geq n\}$. Etudier la monotonie de chacune de ces deux suites.

EX 2.
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} E\left(x + \frac{k}{n}\right) = E(nx)$.

EX 3.
Soient k un entier supérieur ou égal à 1. et $(\alpha_k)_{k=1,\ldots,n}$ des réels tels que $0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n$. On pose pour tout $x \in]0;1[$ et pour $k \in \{1,\ldots,n\}$, $f_k(x) = x^{\alpha_k}$. Montrer que la famille de fonctions $(f_k)_{k\in\{1,\ldots,n\}}$ est libre.

M.P.S.I., Colles, Semaine 16, Sujet 2.

EX 1.
Les deux questions sont indépendantes.
1. Soient A, B deux parties de $\mathbb{R}$, non vides et majorées. Montrer que $A \cup B$ admet une borne supérieure et que $\sup(A \cup B) = max(\sup(A), \sup(B))$.
2. Justifier l'existence et calculer :

$$\inf\left\{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right),\, x_1, \ldots, x_n > 0\right\},$$

où n est un entier naturel pair non nul.

EX 2.
Soient $a \leq b$ deux nombres réels. Montrer que $card([a,b] \cap \mathbb{Z}) = E(b) + E(1-a)$. On distinguera les cas $a \in \mathbb{Z}$ et $a \notin \mathbb{Z}$.

EX 3.
Soient E, F deux espaces vectoriels, et $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
1. Montrer que $Ker(f) \subset Ker(f^2)$.
2. Montrer que $Ker(f) = Ker(f^2)$ si et seulement si $Im(f) \cap Ker(f) = \{0\}$.

M.P.S.I., Colles, Semaine 16, Sujet 3.

EX 1.
Les deux questions sont indépendantes.
1. Soient A, B deux parties de $\mathbb{R}$, non vides et majorées. On note $A + B = \{a + b,\, (a,b) \in A \times B\}$. Montrer que $A + B$ admet une borne supérieure et que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.
2. Justifier l'existence et calculer :

$$\inf\left\{(-1)^n + \frac{1}{n+1},\, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

EX 2.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
1. Montrer qu'il existe $(a_n, b_n) \in \mathbb{N}^*$, tel que $(2+\sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}$ et $3b_n^2 = a_n^2 - 1$.
2. Montrer que $E((2+\sqrt{3})^n)$ est un entier impair.

EX 3.
Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Soit $U \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$, définie par $U(P)(X) = P(X+1)$ pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Donner la matrice de U dans la base $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$, ainsi que son inverse.