EX 1.
Soit $E := \left\{ M(a,b) = \begin{pmatrix} a+b & 3a \\ 2a & a+b \end{pmatrix},\ a,b \in \mathbb{R} \right\}$.
1. Montrer que E est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Donner une base de E.
2. Montrer que la multiplication est interne dans E.

EX 2.
Soient $\mathbb{K}$ un corps, $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $A = (a_{ij})_{i,j \in \{1,\ldots,n\}}$, on note $Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.
1. Montrer que Tr est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Montrer que pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $Tr(AB) = Tr(BA)$. En déduire que si $A = P^{-1}BP$, où $P \in GL_n(\mathbb{K})$, $Tr(A) = Tr(B)$.
3. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et pour $t \in \mathbb{R}$, $M(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh(t) & \sinh(t) \\ 0 & \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix}$. Existe-t-il $P \in GL_n(\mathbb{R})$ $A = P^{-1}M(t)P$?
4. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $A^2 = B^2 = I_n$. On suppose aussi que A et B anticommutent, c'est à dire $AB = -BA$.
− Montrer que $Tr(A) = Tr(B) = 0$.
− Soit $C = iAB$. Montrer que $C^2 = I_n$ et que C anticommute avec A et B.

EX 1.
Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$. Soit aussi l'application

$$u : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM \end{array}$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Donner la matrice de u dans la base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ constituée des matrices élémentaires.
3. Déterminer $Ker(u)$ et $Im(u)$ (ie en donner des bases).

EX 2.
Soient $\mathbb{K}$ un corps, $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que pour $M = (m_{ij})_{i,j \in \{1,\ldots,n\}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $Tr(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{ii}$.
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $Tr(AX) = Tr(BX)$. Montrer que $A = B$.

EX 1.
Soit $E := \left\{ M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix},\ a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$.
1. Montrer que E est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Donner une base de E.
2. Montrer que la multiplication est interne dans E.
3. Soit $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$ tel que la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{C}^3$ est u. Donner la matrice de u dans la base $\mathcal{G} = \{(1,1,1); (1,j,j^2); (1,j^2,j)\}$.

EX 2.
Soient $\mathbb{K}$ un corps, $n, p, m, q \in \mathbb{N}^*$. On note E_{ij} l'élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les éléments sont nuls sauf celui d'indice (i,j) qui vaut 1.
1. Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Déterminer AE_{ij} et $E_{ij}B$.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que pour tout $x \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on a $MX = XM$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $M = \lambda I_n$. Que dire de la réciproque ?