M.P.S.I., Colles, Semaine 14, Sujet 1.

EX 1.
(Question de cours) Soient E et F deux espaces vectoriels sur un même corps. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ une base de E.
Montrer que f est injective si et seulement si la famille $(f(e_i))_{i=1,\dots,n}$ est libre dans F.

EX 2.
Soient f_1 et f_2 deux fonctions définies par :

$$f_1 : \begin{array}{ccc}]-1;1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x-1} \end{array} \quad \text{et} \quad f_2 : \begin{array}{ccc}]-1;1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x+1} \end{array}$$

1. Montrer que f_1 et f_2 sont linéairement indépendantes.
2. Montrer que $f : x \mapsto \frac{2}{x^2-1}$ est dans l'espace vectoriel engendré par f_1 et f_2.

EX 3.
On définit $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+y+z=0 \text{ et } 2x-y+z=0\}$.
1. Montrer que F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner une base de F.

M.P.S.I., Colles, Semaine 14, Sujet 2.

EX 1.
(Question de cours) Soient E et F deux espaces vectoriels sur un même corps. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ une base de E.
Montrer que f est surjective si et seulement si la famille $(f(e_i))_{i=1,\dots,n}$ est génératrice de F.

EX 2.
Soient k un entier supérieur à 1, et $(\alpha_k)_{k=1,\dots,n}$ famille de réels dans $]0;1[$.
1. Montrer que la famille de fonctions $(f_k)_{k=1,\dots,n}$ définie ci dessous est une famille libre :

$$\forall k = 1,\dots,n,\ \forall x \in]0,1[,\ f_k(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x = \alpha_k, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

2. Faire de même avec la famille $(g_k)_{k=1,\dots,n}$ définie pour $k=1,\dots,n$ et $x \in]0;1[$ par : $g_k(x) = \frac{1}{1-\alpha_k x}$.

EX 3.
Donner un système d'équations du sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $u=(1,1,1,1)$ et $v=(1,2,-1,3)$.

M.P.S.I., Colles, Semaine 14, Sujet 3.

EX 1.
(Question de cours) Soit E un espace vectoriel. Soit $(u_1,\dots,u_p)$ une famille libre de vecteurs de E ($p \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$) et v un vecteur de E.
Montrer que $(u_1,\dots,u_p,v)$ est libre si et seulement si v n'est pas dans l'espace vectoriel engendré par $(u_1,\dots,u_p)$.

EX 2.
On définit $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^3,\ x+y+z+t=0\}$.
1. Montrer que F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner une base de F.

EX 3.
Soient k un entier supérieur ou égal à 1 et $(\alpha_k)_{k=1,\dots,n}$ des réels tels que $0<\alpha_1<\dots<\alpha_n<1$. On pose, pour $x \in]0,1[$ et pour $k=1,\dots,n$, $f_k(x) = x^{\alpha_k}$.
Montrer que la famille de fonctions $(f_k)_{k=1,\dots,n}$ est libre.

M.P.S.I., Colles, Semaine 14, Sujet 1.

EX 1.
(Question de cours) Soient E et F deux espaces vectoriels sur un même corps. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ une base de E.
Montrer que f est injective si et seulement si la famille $(f(e_i))_{i=1,\dots,n}$ est libre dans F.

EX 2.
Soient f_1 et f_2 deux fonctions définies par :

$$f_1 : \begin{array}{ccc}]-1;1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x-1} \end{array} \quad \text{et} \quad f_2 : \begin{array}{ccc}]-1;1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x+1} \end{array}$$

1. Montrer que f_1 et f_2 sont linéairement indépendantes.
2. Montrer que $f : x \mapsto \frac{2}{x^2-1}$ est dans l'espace vectoriel engendré par f_1 et f_2.

EX 3.
On définit $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+y+z=0 \text{ et } 2x-y+z=0\}$.
1. Montrer que F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner une base de F.

M.P.S.I., Colles, Semaine 14, Sujet 2.

EX 1.
(Question de cours) Soient E et F deux espaces vectoriels sur un même corps. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ une base de E.
Montrer que f est surjective si et seulement si la famille $(f(e_i))_{i=1,\dots,n}$ est génératrice de F.

EX 2.
Soient k un entier supérieur à 1, et $(\alpha_k)_{k=1,\dots,n}$ famille de réels dans $]0;1[$.
1. Montrer que la famille de fonctions $(f_k)_{k=1,\dots,n}$ définie ci dessous est une famille libre :

$$\forall k = 1,\dots,n,\ \forall x \in]0,1[,\ f_k(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x = \alpha_k, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

2. Faire de même avec la famille $(g_k)_{k=1,\dots,n}$ définie pour $k=1,\dots,n$ et $x \in]0;1[$ par : $g_k(x) = \frac{1}{1-\alpha_k x}$.

EX 3.
Donner un système d'équations du sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $u=(1,1,1,1)$ et $v=(1,2,-1,3)$.

M.P.S.I., Colles, Semaine 14, Sujet 3.

EX 1.
(Question de cours) Soit E un espace vectoriel. Soit $(u_1,\dots,u_p)$ une famille libre de vecteurs de E ($p \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$) et v un vecteur de E.
Montrer que $(u_1,\dots,u_p,v)$ est libre si et seulement si v n'est pas dans l'espace vectoriel engendré par $(u_1,\dots,u_p)$.

EX 2.
On définit $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^3,\ x+y+z+t=0\}$.
1. Montrer que F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner une base de F.

EX 3.
Soient k un entier supérieur ou égal à 1 et $(\alpha_k)_{k=1,\dots,n}$ des réels tels que $0<\alpha_1<\dots<\alpha_n<1$. On pose, pour $x \in]0,1[$ et pour $k=1,\dots,n$, $f_k(x) = x^{\alpha_k}$.
Montrer que la famille de fonctions $(f_k)_{k=1,\dots,n}$ est libre.