M.P.S.I., Colles, Semaine 13, Sujet 1.

EX 1.
(Question de cours)Soient E et F deux espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Montrer que si E' est un sous espace vectoriel de E, $f(E')$ est un sous espace vectoriel de F.
EX 2.
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On munit l'ensemble $E \times E$ de l'addition usuelle :

$$\forall (x, y) \text{ et } (x', y') \in E \times E,\ (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y'),$$

et de la multiplication externe par les complexes :

$$\forall (x, y) \in E \times E,\ \forall z = a + ib \in \mathbb{C},\ (a + ib).(x, y) = (ax - by, ay + bx).$$

Montrer que $E \times E$ muni de ces deux lois est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.
EX 3.
Soient E, F, G trois espaces vectoriels sur un même corps $\mathbb{K}$. Soient $v : E \to F$ et $u : F \to G$ deux applications linéaires. Montrer que $u \circ v = 0$ si et seulement si $Imv \subset Keru$.

M.P.S.I., Colles, Semaine 13, Sujet 2.

EX 1.
(Question de cours) Donner (précisément !) la définition d'un espace vectoriel E sur un corps $\mathbb{K}$.
EX 2.
Soit E un espace vectoriel et $f : E \to E$ une application linéaire.
1. Montrer que $Kerf \subset Kerf^2$.
2. Montrer que $Kerf = Kerf^2$ si et seulement si $Imf \cap Kerf = \{0\}$.

EX 3.
Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y - z = 0\}$ et $G = \{(a - b, a + b, a - 3b),\ a, b \in \mathbb{R}\}$.
1. Montrer que F et G sont des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer $F \cap G$.

M.P.S.I., Colles, Semaine 13, Sujet 3.

EX 1.
(Question de cours) Soient E, F deux espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire. Montrer que f est injective si et seulement si $Kerf = \{0\}$.

EX 2.
Soient E un espace vectoriel.
1. Dans cette question, on suppose $E = \mathbb{R}^2$. Soient $F = Vect(e_1)$, $G = Vect(e_2)$ où $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$. Que vaut $F \cup G$? Est-ce un sev ?
2. Soient F, G des sous espaces vectoriels de E. Montrer que $F \cup G$ est un sous espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

EX 3.
Soient X un ensemble et E un espace vectoriel. Soit l'application :

$$\begin{array}{cccc} E_a & \mathcal{F}(X, E) & \to & E \\ & f & \mapsto & f(a). \end{array}$$

1. Montrer que E_a est linéaire.
2. Déterminer son noyau et son image.

M.P.S.I., Colles, Semaine 13, Sujet 1.

EX 1.
(Question de cours)Soient E et F deux espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Montrer que si E' est un sous espace vectoriel de E, $f(E')$ est un sous espace vectoriel de F.
EX 2.
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On munit l'ensemble $E \times E$ de l'addition usuelle :

$$\forall (x, y) \text{ et } (x', y') \in E \times E,\ (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y'),$$

et de la multiplication externe par les complexes :

$$\forall (x, y) \in E \times E,\ \forall z = a + ib \in \mathbb{C},\ (a + ib).(x, y) = (ax - by, ay + bx).$$

Montrer que $E \times E$ muni de ces deux lois est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.
EX 3.
Soient E, F, G trois espaces vectoriels sur un même corps $\mathbb{K}$. Soient $v : E \to F$ et $u : F \to G$ deux applications linéaires. Montrer que $u \circ v = 0$ si et seulement si $Imv \subset Keru$.

M.P.S.I., Colles, Semaine 13, Sujet 2.

EX 1.
(Question de cours) Donner (précisément !) la définition d'un espace vectoriel E sur un corps $\mathbb{K}$.
EX 2.
Soit E un espace vectoriel et $f : E \to E$ une application linéaire.
1. Montrer que $Kerf \subset Kerf^2$.
2. Montrer que $Kerf = Kerf^2$ si et seulement si $Imf \cap Kerf = \{0\}$.

EX 3.
Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y - z = 0\}$ et $G = \{(a - b, a + b, a - 3b),\ a, b \in \mathbb{R}\}$.
1. Montrer que F et G sont des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer $F \cap G$.

M.P.S.I., Colles, Semaine 13, Sujet 3.

EX 1.
(Question de cours) Soient E, F deux espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire. Montrer que f est injective si et seulement si $Kerf = \{0\}$.

EX 2.
Soient E un espace vectoriel.
1. Dans cette question, on suppose $E = \mathbb{R}^2$. Soient $F = Vect(e_1)$, $G = Vect(e_2)$ où $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$. Que vaut $F \cup G$? Est-ce un sev ?
2. Soient F, G des sous espaces vectoriels de E. Montrer que $F \cup G$ est un sous espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

EX 3.
Soient X un ensemble et E un espace vectoriel. Soit l'application :

$$\begin{array}{cccc} E_a & \mathcal{F}(X, E) & \to & E \\ & f & \mapsto & f(a). \end{array}$$

1. Montrer que E_a est linéaire.
2. Déterminer son noyau et son image.