M.P.S.I., Colles, Semaine 12, Sujet 1.

EX 1.
(Question de cours) Quels sont les sous groupes de $(\mathbb{Z},+)$? Démontrer le résultat.
EX 2.
Soit p un nombre premier.
1. Montrer que p divise le coefficient binomial $\binom{p}{k}$ pour tout $k \in \{1,2,\ldots,p-1\}$.
2. Soient a et b des entiers. Montrer que $(a+b)^p - a^p - b^p$ est un multiple de p. En déduire que $(a+1)^p - (a^p+1)$ est un multiple de p.
3. Soit a un entier. Montrer par récurrence sur a que $a^p - a$ est un multiple de p.

EX 3.
Soit $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$, où les a_i sont des entiers. Montrer que si P_n admet une racine rationnelle r/s avec r et s premiers entre eux, alors s divise a_n et r divise a_0.

M.P.S.I., Colles, Semaine 12, Sujet 2.

EX 1.
(Question de cours) Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.
EX 2.
On définit la suite de Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$
1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, F_n est premier avec F_{n+1}.
2. Montrer que pour tout $m < n$, $F_n = F_{m+1}F_{n-m} + F_m F_{n-m-1}$. On pourra raisonner par récurrence sur m, avec n fixé.
3. Soit $m \leq n$. Montrer que le pgcd de F_n et F_m est le même que celui de F_n et F_{n-m}.
4. En déduire que le pgcd de F_m et F_n est F_d où d est le pgcd de m et n.

M.P.S.I., Colles, Semaine 12, Sujet 3.

EX 1.
(Question de cours)
1. Enoncer et démontrer le lemme de Gauss.
2. Application : Soient a, b, c des entiers tels que b divise a, c divise a. On suppose b et c premiers entre eux. Montrer que bc divise a.

EX 2.
On définit l'application σ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$:
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sigma(n) = \sum_{d|n} d.$$
On dit qu'un entier n est parfait si $\sigma(n) = 2n$.
1. Vérifier que 6 et 28 sont parfaits.
2. Calculer $\sigma(p)$ et $\sigma(p^k)$ où p est premier et $k \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que $\sigma(p^k q^l) = \sigma(p^k)\sigma(q^l)$ pour p et q premiers distincts et $k, l \in \mathbb{N}$. On admet que l'on peut en déduire $\sigma(mn) = \sigma(m)\sigma(n)$ pour n et m premiers entre eux.
4. Soit $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ où l'on suppose que p et $2^p - 1$ sont premiers. Montrer que n est parfait.
5. Le but de cette question est de montrer la réciproque. Soit n un nombre parfait pair. On l'écrit $n = 2^t m$ où t entier strictement positif et m impair.

- Montrer que $2^{t+1}m = (2^{t+1}-1)\sigma(m)$, et $m = (2^{t+1}-1)M$ où $M \in \mathbb{N}$.
- En déduire $\sigma(m) = m + M$, puis $M = 1$ et conclure quant à la forme de n.

M.P.S.I., Colles, Semaine 12, Sujet 1.

EX 1.
(Question de cours) Quels sont les sous groupes de $(\mathbb{Z},+)$? Démontrer le résultat.
EX 2.
Soit p un nombre premier.
1. Montrer que p divise le coefficient binomial $\binom{p}{k}$ pour tout $k \in \{1,2,\ldots,p-1\}$.
2. Soient a et b des entiers. Montrer que $(a+b)^p - a^p - b^p$ est un multiple de p. En déduire que $(a+1)^p - (a^p+1)$ est un multiple de p.
3. Soit a un entier. Montrer par récurrence sur a que $a^p - a$ est un multiple de p.

EX 3.
Soit $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$, où les a_i sont des entiers. Montrer que si P_n admet une racine rationnelle r/s avec r et s premiers entre eux, alors s divise a_n et r divise a_0.

M.P.S.I., Colles, Semaine 12, Sujet 2.

EX 1.
(Question de cours) Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.
EX 2.
On définit la suite de Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$
1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, F_n est premier avec F_{n+1}.
2. Montrer que pour tout $m < n$, $F_n = F_{m+1}F_{n-m} + F_m F_{n-m-1}$. On pourra raisonner par récurrence sur m, avec n fixé.
3. Soit $m \leq n$. Montrer que le pgcd de F_n et F_m est le même que celui de F_n et F_{n-m}.
4. En déduire que le pgcd de F_m et F_n est F_d où d est le pgcd de m et n.

M.P.S.I., Colles, Semaine 12, Sujet 3.

EX 1.
(Question de cours)
1. Enoncer et démontrer le lemme de Gauss.
2. Application : Soient a, b, c des entiers tels que b divise a, c divise a. On suppose b et c premiers entre eux. Montrer que bc divise a.

EX 2.
On définit l'application σ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$:
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sigma(n) = \sum_{d|n} d.$$
On dit qu'un entier n est parfait si $\sigma(n) = 2n$.
1. Vérifier que 6 et 28 sont parfaits.
2. Calculer $\sigma(p)$ et $\sigma(p^k)$ où p est premier et $k \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que $\sigma(p^k q^l) = \sigma(p^k)\sigma(q^l)$ pour p et q premiers distincts et $k, l \in \mathbb{N}$. On admet que l'on peut en déduire $\sigma(mn) = \sigma(m)\sigma(n)$ pour n et m premiers entre eux.
4. Soit $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ où l'on suppose que p et $2^p - 1$ sont premiers. Montrer que n est parfait.
5. Le but de cette question est de montrer la réciproque. Soit n un nombre parfait pair. On l'écrit $n = 2^t m$ où t entier strictement positif et m impair.

- Montrer que $2^{t+1}m = (2^{t+1}-1)\sigma(m)$, et $m = (2^{t+1}-1)M$ où $M \in \mathbb{N}$.
- En déduire $\sigma(m) = m + M$, puis $M = 1$ et conclure quant à la forme de n.