M.P.S.I., Colles, Semaine 11, Sujet 1.

EX 1.
(Cours) Soient G_1 et G_2 deux groupes, d'éléments neutres respectifs e_1 et e_2. Soit $f : G_1 \to G_2$ un morphisme de groupe. Montrer que f est injectif si et seulement si son noyau est réduit à $\{e_1\}$.
EX 2.
(Transport de structure)
1. Soit $(G, .)$ un groupe de neutre e. Soit E un ensemble. Soit $\phi : G \to E$ une application bijective. On définit une loi de composition $*$ sur E par :

$$\forall (a, b) \in E^2,\ a * b = \phi(\phi^{-1}(a).\phi^{-1}(b)).$$

Montrer que $(E, *)$ est un groupe.
2. On définit sur l'intervalle $]-1; 1[$ une loi de composition par :

$$\forall (a, b) \in]-1, 1[^2,\ a * b = \frac{a + b}{1 + ab}.$$

Montrer que $(]-1; 1[, *)$ est un groupe, et qu'il existe un isomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ sur $(]-1; 1[, *)$.

M.P.S.I., Colles, Semaine 11, Sujet 2.

EX 1.
(Cours) Soient G_1 et G_2 deux groupes, d'éléments neutres respectifs e_1 et e_2. Soit $f : G_1 \to G_2$ une application. Que signifie "f est un morphisme de groupe"? Montrer que si f est un tel morphisme, $f(e_1) = e_2$ et pour tout $a \in G_1$, $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$.
EX 2.
Soit A un anneau. On dit que A est intègre, si, quels que soient $(a, b) \in A^2$, on a :

$$ab = 0 \ \Rightarrow\ a = 0 \text{ ou } b = 0.$$

1. Soit A un anneau intègre. Soit $a \in A$ non nul. On définit l'application :

$$\phi_a : \begin{array}{ccc} A & \to & A \\ x & \mapsto & ax \end{array}.$$

Montrer que ϕ_a est injective.
2. Montrer que si A est un anneau intègre et fini alors A est un corps.

M.P.S.I., Colles, Semaine 11, Sujet 3.

EX 1.
(Cours) Donner la définition d'un sous groupe. Donner la définition de l'image et du noyau d'un morphisme de groupe, et montrer que ce sont des sous groupes.
EX 2.
Soit E un ensemble non vide. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des applications de E dans $\{-1, 1\}$.
1. On définit une loi de composition notée . sur $\mathcal{F}$ en posant :

$$\forall (f, g) \in \mathcal{F}^2,\ f.g : x \in E \mapsto f(x)g(x).$$

Montrer que $(\mathcal{F}, .)$ est un groupe.
2. Montrer que $(\mathcal{P}(E), \Delta)$ est un groupe. On rappelle que Δ est la différence symétrique définie par : $A \Delta B = (A \cup B) \backslash (A \cap B) = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.
3. On définit l'application :

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{F} \\ A & \mapsto & \Phi(A) : \ x \ \mapsto \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } x \notin A, \\ -1 \text{ si } x \in A. \end{array} \right. \end{array}$$

Montrer que Φ est un isomorphisme.