M.P.S.I., Colles, Semaine 10, Sujet 1.

EX 1.
Soient E et F deux ensembles, et $f : E \to F$ une application. Montrer que f est injective si et seulement si, quel que soit $A \in \mathcal{P}(E)$, $A = f^{-1}(f(A))$.

EX 2.
Soit E un ensemble à n éléments. La première question est indépendante des deux autres.
1. Quel est le nombre de couples $(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $X \subset Y$?
2. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ fixé. Quel est le cardinal de $G_A = \{B \in \mathcal{P}(E),\ A \cup B = E\}$?
3. Quel est le cardinal de $H = \{(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2,\ A \cup B = E\}$?

EX 3.
Soit $E = \{(I, f),\ I$ intervalle et $f : I \to \mathbb{R}\}$. On définit la relation binaire $\leq$ sur E par : $(I, f) \leq (J, g) \iff I \subset J$ et $g|_I = f$. Montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre.

M.P.S.I., Colles, Semaine 10, Sujet 2.

EX 1.
Soient E et F deux ensembles, et $f : E \to F$ une application. Montrer que f est surjective si et seulement si, quel que soit $B \in \mathcal{P}(F)$, $B = f(f^{-1}(B))$.

EX 2.
Soit E un ensemble à n éléments. Soit $\mathcal{F} = f : E \to E,\ f \circ f = f$.
1. Soit $f : E \to E$. Montrer que $f \in \mathcal{F}$ si et seulement si la restriction de f à $f(E)$ est l'identité de $f(E)$.
2. En déduire le cardinal de $\mathcal{F}$.

EX 3.
Soit E un ensemble et $f : E \to \mathbb{R}$ une application injective. On définit sur E la relation binaire $\leq$ par : $x \leq y \iff f(x) \leq f(y)$. Montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre.

M.P.S.I., Colles, Semaine 10, Sujet 3.

EX 1.
Soient E et F deux ensembles, et $f : E \to F$ une application. Montrer que f est bijective si et seulement si, quel que soit $A \in \mathcal{P}(E)$, $f(\mathcal{C}_E(A)) = \mathcal{C}_F(f(A))$.

EX 2.
Soit E un ensemble fini de cardinal n. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ partie fixée de cardinal p ($p \leq n$). Soit $k \leq n$ fixé.
1. Quel est le cardinal de l'ensemble des parties $B \in \mathcal{P}(E)$ de cardinal k qui contiennent un unique élément de A ?
2. Quel est le cardinal de l'ensemble des parties $B \in \mathcal{P}(E)$ de cardinal k qui contiennent au moins un élément de A ?
3. Cette question est indépendante des deux précédentes. Quelle est la somme des cardinaux de toutes les parties de E ?

EX 3.
Sur $\mathbb{R}_+^*$ on définit la relation binaire $\leq$ par : $x \leq y \iff f(x) \leq f(y)$. Montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre.

M.P.S.I., Colles, Semaine 10, Sujet 1.

EX 1.
Soient E et F deux ensembles, et $f : E \to F$ une application. Montrer que f est injective si et seulement si, quel que soit $A \in \mathcal{P}(E)$, $A = f^{-1}(f(A))$.

EX 2.
Soit E un ensemble à n éléments. La première question est indépendante des deux autres.
1. Quel est le nombre de couples $(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $X \subset Y$?
2. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ fixé. Quel est le cardinal de $G_A = \{B \in \mathcal{P}(E),\ A \cup B = E\}$?
3. Quel est le cardinal de $H = \{(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2,\ A \cup B = E\}$?

EX 3.
Soit $E = \{(I, f),\ I$ intervalle et $f : I \to \mathbb{R}\}$. On définit la relation binaire $\leq$ sur E par : $(I, f) \leq (J, g) \iff I \subset J$ et $g|_I = f$. Montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre.

M.P.S.I., Colles, Semaine 10, Sujet 2.

EX 1.
Soient E et F deux ensembles, et $f : E \to F$ une application. Montrer que f est surjective si et seulement si, quel que soit $B \in \mathcal{P}(F)$, $B = f(f^{-1}(B))$.

EX 2.
Soit E un ensemble à n éléments. Soit $\mathcal{F} = f : E \to E,\ f \circ f = f$.
1. Soit $f : E \to E$. Montrer que $f \in \mathcal{F}$ si et seulement si la restriction de f à $f(E)$ est l'identité de $f(E)$.
2. En déduire le cardinal de $\mathcal{F}$.

EX 3.
Soit E un ensemble et $f : E \to \mathbb{R}$ une application injective. On définit sur E la relation binaire $\leq$ par : $x \leq y \iff f(x) \leq f(y)$. Montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre.

M.P.S.I., Colles, Semaine 10, Sujet 3.

EX 1.
Soient E et F deux ensembles, et $f : E \to F$ une application. Montrer que f est bijective si et seulement si, quel que soit $A \in \mathcal{P}(E)$, $f(\mathcal{C}_E(A)) = \mathcal{C}_F(f(A))$.

EX 2.
Soit E un ensemble fini de cardinal n. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ partie fixée de cardinal p ($p \leq n$). Soit $k \leq n$ fixé.
1. Quel est le cardinal de l'ensemble des parties $B \in \mathcal{P}(E)$ de cardinal k qui contiennent un unique élément de A ?
2. Quel est le cardinal de l'ensemble des parties $B \in \mathcal{P}(E)$ de cardinal k qui contiennent au moins un élément de A ?
3. Cette question est indépendante des deux précédentes. Quelle est la somme des cardinaux de toutes les parties de E ?

EX 3.
Sur $\mathbb{R}_+^*$ on définit la relation binaire $\leq$ par : $x \leq y \iff f(x) \leq f(y)$. Montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre.