Exercice 1

1. On calcule les modules $|z_1| = \sqrt{(\sqrt{6}/2)^2 + (\sqrt{2}/2)^2} = \sqrt{2}$, et $|z_2| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$. Donc

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos(-\pi/6) + i\sin(-\pi/6)\right) = \sqrt{2}e^{-i\pi/6}.$$

$$z_2 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos(-\pi/4) + i\sin(-\pi/4)\right) = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}.$$

On obtient donc

$$Z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}e^{-i\pi/6}}{\sqrt{2}e^{-i\pi/4}} = e^{i(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4})} = e^{i\pi/12} = \boxed{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = Z}.$$

2. On peut aussi calculer le quotient $Z = z_1/z_2$ en gardant z_1 et z_2 sous forme algébrique :

$$Z = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2(1-i)} = \frac{\left(\sqrt{6}-i\sqrt{2}\right)(1+i)}{2(1-i)(1+i)} = \frac{\sqrt{6}-i^2\sqrt{2}+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2|1-i|^2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Comme on a aussi $Z = \cos(\pi/12) + i\sin(\pi/12)$ par **1.**, par unicité des parties réelle et imaginaire de Z, on identifie

$$\mathrm{Re}(Z) = \boxed{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(Z) = \boxed{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}.$$

3. En utilisant le résultat de **2.**, l'équation est équivalente à

$$4\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\cos(x) + 4\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\sin(x) = 2.$$

On simplifie l'écriture : $\cos(\pi/12)\cos(x) + \sin(\pi/12)\sin(x) = 1/2$. Il s'agit donc de résoudre

$$\cos\left(\frac{\pi}{12} - x\right) = \frac{1}{2}.$$

On a donc

$$\frac{\pi}{12} - x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \ \ k\in\mathbb{Z}, \ \text{ou} \ \frac{\pi}{12} - x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \ \ k\in\mathbb{Z},$$

ce qui équivaut à

$$x = -\frac{\pi}{4} - 2k\pi, \ \ k\in\mathbb{Z}, \ \text{ou} \ x = \frac{5\pi}{12} - 2k\pi, \ \ k\in\mathbb{Z}.$$

L'ensemble des solutions est donc $\boxed{\left\{\frac{-\pi}{4} + 2k'\pi, \ \frac{5\pi}{12} + 2k'\pi, \ \ k'\in\mathbb{Z}\right\}}$.

Exercice 2

1. La quantité à calculer est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison $q = e^{i\pi/n}$ et de premier terme 1. Comme la raison q est différente de 1,

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{k\pi}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{i\frac{\pi}{n}}\right)^k = \frac{1-\left(e^{i\frac{\pi}{n}}\right)^n}{1-e^{i\frac{\pi}{n}}} = \frac{1-e^{in\frac{\pi}{n}}}{1-e^{i\frac{\pi}{n}}} = \frac{1-e^{i\pi}}{1-e^{i\frac{\pi}{n}}} = \boxed{\frac{2}{1-e^{i\frac{\pi}{n}}}},$$

puisque $e^{i\pi} = -1$.

2. En utilisant que pour tout θ, $\cos(\theta) = \mathrm{Re}(e^{i\theta})$, et qu'une somme de parties réelles est égale à la partie réelle de la somme, on calcule

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1}\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{Re}\left(e^{i\frac{k\pi}{n}}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{k\pi}{n}}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{2}{1-e^{i\frac{\pi}{n}}}\right),$$

et de même, $S_n = \sum_{k=0}^{n-1}\sin(k\pi/n) = \mathrm{Im}(2/(1-e^{i\pi/n}))$. On doit donc mettre le nombre complexe $2/(1-e^{i\pi/n})$ sous forme algébrique pour identifier sa partie réelle et sa partie impaginaire. On utilise la technique de l'arc moitié :

$$\begin{aligned}
\frac{2}{1-e^{i\frac{\pi}{n}}} &= \frac{2}{e^{i\frac{\pi}{2n}}\left(e^{-i\frac{\pi}{2n}} - e^{i\frac{\pi}{2n}}\right)} = \frac{2}{e^{i\frac{\pi}{2n}} \times \left(-2i\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right)} = \frac{ie^{-i\frac{\pi}{2n}}}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}, \\
&= \frac{i}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2n}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2n}\right)\right), \\
&= \frac{i}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right), \\
&= i\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} + 1 = i\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)} + 1,
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient donc $\boxed{C_n = 1, \quad \text{et} \quad S_n = \frac{1}{\tan(\frac{\pi}{2n})}.}$

Exercice 3

1. Par le cours, le centre de gravité d'un triangle est l'isobarycentre des sommets. Donc $\boxed{G = \mathrm{Bar}\{(A,1),(B,1),(C,1)\}}$. De même, le milieu d'un segment est l'isobarycentre des extrémités du segment. Donc $\boxed{I = \mathrm{Bar}\{(A,1),(B,1)\}}$, et $\boxed{J = \mathrm{Bar}\{(B,1),(C,1)\}}$. Ensuite, pour le point K, on utilise la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{DC} = 4\overrightarrow{DK} \iff \overrightarrow{DK} + \overrightarrow{KC} = 4\overrightarrow{DK} \iff 3\overrightarrow{KD} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}.$$

Par définition du barycentre, on a donc $\boxed{K = \mathrm{Bar}\{(C,1),(D,3)\}}$. De même, $\boxed{L = \mathrm{Bar}\{(A,1),(D,3)\}}$.

2. L'idée est, comme indiqué, d'introduire un point H bien choisi et de montrer que ce point appartient à chacune des trois droites (en l'écrivant comme barycentre de deux points de chaque droite). Les trois droites seront alors concourantes en ce point. On définit $H = \mathrm{Bar}\{(A,1),(B,1),(C,1),(D,3)\}$. Alors, par associativité du barycentre, en utilisant **1.**,

- $H = \mathrm{Bar}\{(G,3),(D,3)\}$. Donc H appartient à (DG).
- $H = \mathrm{Bar}\{(I,2),(C,1),(D,3)\} = \mathrm{Bar}\{(I,2),(K,4)\}$. Donc H appartient à (IK).
- $H = \mathrm{Bar}\{(A,1),(J,2),(D,3)\} = \mathrm{Bar}\{(L,4),(J,2)\}$. Donc H appartient à (LJ).

Donc $\boxed{(IK),\ (JL) \text{ et } (DG) \text{ sont concourantes en } H}$.

Exercice 4

1. (a) On connait les coordonnées $A(1,0,2)$, $B(1,1,4)$ et $C(-1,1,1)$, donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont pour coordonnées

$$\overrightarrow{AB} : \begin{pmatrix} 1-1 \\ 1-0 \\ 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC} : \begin{pmatrix} -1-1 \\ 1-0 \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Si les vecteurs étaient colinéaires, il existerait un réel λ tel que $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AC}$, et donc tel que

$$\begin{cases} 0 = -2\lambda \\ 1 = \lambda \\ 2 = -\lambda \end{cases}$$

Ce système n'admet pas de solution λ, donc $\boxed{\text{les vecteurs ne sont pas colinéaires}}$.

(b) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ n'étant pas colinéaires, les points A, B, et C définissent bien un plan. Un vecteur normal $\vec{n}$ à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est donné par le produit vectoriel :

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1\times(-1) - 2\times 1 \\ (-2)\times 2 - 0\times(-1) \\ 0\times 1 - 1\times(-2) \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{n}},$$

(on peut s'assurer qu'il n'y a pas d'erreur(s) en vérifiant que les produits scalaires $\overrightarrow{AB}.\vec{n} = 0$ et $\overrightarrow{AC}.\vec{n} = 0$ sont bien nuls). Déterminons une équation du plan (ABC) : un point $M(x,y,z)$ appartient au plan (ABC) si $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal à $\vec{n}$ c'est à dire si

$$\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0 \iff (x-1)(-3) + (y-0)(-4) + (z-2)(2) = 0.$$

Une équation cartésienne du plan est donc $\boxed{3x + 4y - 2z + 1 = 0}$.

2. (a) D'après les équations cartésiennes données, un vecteur normal à $\mathcal{P}_1$ est $\vec{n}_1(2,1,2)$ et un vecteur normal à $\mathcal{P}_2$ est $\vec{n}_2(1,-2,6)$. Ces vecteurs ne sont pas colinéaires (poser le système $\vec{n}_1 = \lambda\vec{n}_2$, comme en **1. (a)**), donc $\boxed{\text{les plans sont sécants}}$. On sait que leur intersection est une droite $\mathcal{D}$.

Soit $\vec{v}$ un vecteur directeur de cette droite. Alors, $\vec{v}$ appartient à la direction du plan $\mathcal{P}_1$, donc $\vec{v}$ est orthogonal à $\vec{n}_1$, et de même, $\vec{v}$ est aussi orthogonal à $\vec{n}_2$. On peut donc choisir

$$\vec{v} = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 1\times 6 - 2\times(-2) \\ 1\times 2 - 6\times 2 \\ 2\times(-2) - 1\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur $\vec{u}(-2,2,1)$ est colinéaire à $\vec{v}$ (on a $\vec{v} = -5\vec{u}$), donc $\boxed{\vec{u}}$ dirige aussi $\mathcal{D}$.

(b) Par **(a)**, on connait déjà les coordonnées d'un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$. On doit trouver les coordonnées (x_I, y_I, z_I) d'un point I appartenant à $\mathcal{D}$. Si I appartient à $\mathcal{D}$, ses coordonnées vérifient les équations des deux plans : $2x_I + y_I + 2z_I + 1 = 0$ et $x_I - 2y_I + 6z_I = 0$. On a donc un système de 2 équations, 3 inconnues. On peut donc en fixer une librement. Choisissons $z_I = 0$. On résout donc le système

$$\begin{cases} 2x_I + y_I + 1 = 0 \\ x_I - 2y_I = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 5y_I + 1 = 0 \\ x_I = 2y_I \end{cases} \iff \begin{cases} x_I = -2/5 \\ y_I = -1/5 \end{cases}$$

Ainsi, $I(-2/5, -1/5, 0)$ appartient à $\mathcal{D} = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$. Un point $M(x,y,z)$ appartient à $\mathcal{D}$, si les vecteurs $\overrightarrow{IM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, c'est-à-dire s'il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{IM} = \lambda\vec{u}$, ce qui se traduit au niveau des coordonnées par

$$\begin{cases} x - x_I = -2\lambda \\ y - y_I = 2\lambda \\ z - z_I = \lambda \end{cases} \lambda \in \mathbb{R} \iff \boxed{\begin{cases} x = 2/5 - 2\lambda \\ y = 1/5 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}}$$

3. (a) Le barycentre d'une famille de points pondérés existe si la somme totale des masses des points est non nulle. Ici, cette somme vaut $1 + 2 + t = t + 3 \neq 0$ pour $t \geq 0$. Donc $\boxed{G_t \text{ est bien défini}}$.

(b) On sait que $G_t = \text{Bar}\{(A,1),(B,2),(C,t)\}$, et $I = \text{Bar}\{(A,1),(B,2)\}$. Par associativité, $G_t = \text{Bar}\{(I,3),(C,t)\}$. Donc,

$$\begin{aligned} 3\overrightarrow{G_tI} + t\overrightarrow{G_tC} = \vec{0} \quad &\iff \quad 3\overrightarrow{G_tI} + t\left(\overrightarrow{G_tI} + \overrightarrow{IC}\right) = \vec{0}, \\ &\iff \quad (3+t)\overrightarrow{G_tI} + t\overrightarrow{IC} = \vec{0}, \end{aligned}$$

ce qui donne la relation demandée $\boxed{\overrightarrow{IG_t} = \frac{t}{3+t}\overrightarrow{IC}}$.

(c) Soit f la fonction $t \mapsto \frac{t}{3+t}$ sur $\mathbb{R}_+$. Cette fonction est dérivable, de dérivée

$$f' : t \mapsto f'(t) = \frac{1(3+t) - 1(t)}{(3+t)^2} = \frac{3}{(3+t)^2} > 0.$$

Donc f est croissante, et en calculant sa valeur en 0 et sa limite en $+\infty$, on a le tableau de variations suivant :

t	0	$+\infty$
$f'(t)$	$+$	
f	0 $\nearrow$	1

Lorsque t parcourt l'ensemble des réels positifs, $f(t)$ prend toutes les valeurs de l'intervalle $[0;1[$ (la limite 1 n'est pas atteinte), et donc $\boxed{G_t \text{ parcourt le segment } [IC], \text{ sauf le point } C}$ (qui est à la limite).

Le milieu J de $[IC]$ coincide avec G_t lorsque $\overrightarrow{IG_t} = (1/2)\overrightarrow{IC}$, c'est à dire lorsque $f(t) = 1/2$. On résout donc

$$f(t) = \frac{1}{2} \iff \frac{t}{3+t} = \frac{1}{2} \iff 2t = 3 + t \iff \boxed{t = 3}.$$