INTRODUCTION À LA DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES DES FRACTIONS RATIONNELLES

Dans ce document, $\mathbb{K}$ est le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$.

1 Fractions rationnelles

Définition 1
- *Une* ***fraction rationnelle*** *est une expression formelle de la forme $\frac{P}{Q}$, où P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, avec $Q \neq 0$ (Q n'est pas le polynôme nul). On note $\mathbb{K}(X)$ l'ensemble des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{K}$.*
- *On appelle* ***forme irréductible d'une fraction rationnelle*** *R toute écriture de la forme $\frac{P}{Q}$ où P et Q n'admettent aucun facteur commun dans leur décomposition en produit de facteurs irréductibles.*
- *Si $F = \frac{P}{Q}$ est une fraction rationnelle, la quantité $deg(P) - deg(Q)$ est appelé* ***degré*** *de F et noté $deg(F)$.*

Exemple. La fraction rationnelle $\frac{(X^2-2X+4)(X-2)}{X^3(X-2)^2}$ n'est pas irréductible. Elle est égale à la fraction rationnelle $\frac{(X^2-2X+4)}{X^3(X-2)}$ qui est sa forme irréductible. Son degré est $3 - 5 = -2$.

Remarques.
- Le degré d'une fraction rationnelle est donc soit un entier relatif, soit $-\infty$.
- On munit $\mathbb{K}(X)$ de deux lois internes $+$ et $\times$ qui en font un corps, en posant,

$$\frac{P}{Q} + \frac{R}{S} = \frac{PS + QR}{QS} \text{ et } \frac{P}{Q} \times \frac{R}{S} = \frac{PR}{QS},$$

  et l'on peut montrer que ces définitions ne dépendent pas de la forme de la fraction rationnelle choisie (irréductible ou non).
- Comme pour les polynômes, on peut substituer à X un élément du corps $\mathbb{K}$. On définit ainsi, pour toute fraction rationnelle $F = \frac{P}{Q}$, la fonction $x \mapsto F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ dite *fonction rationnelle* associée à F et définie sur $\mathbb{K}$ privé des racines de Q. On note encore cette fonction F.

Définition 2 *Soit $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ sous forme irréductible. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$.*
- *On dit que α est un* ***zéro*** *ou une* ***racine*** *de F si α est une racine de P.*
- *On dit que α est un* ***pôle*** *de F si α est une racine de Q. On parle de l'****ordre de multiplicité du pôle*** *comme on parlait de l'ordre de multiplicité d'une racine. Un pôle d'ordre 1 est dit* ***simple****.*

Exemple. Dans $\mathbb{R}(X)$, la fraction rationnelle $\dfrac{(X^2 + X + 1)(X - 1)^2 X}{(X - 2)(X^2 + 1)(X + 1)^4}$ admet
- pour zéros 1 et 0,
- pour pôles -1 (de multiplicité 4), et 2 (pôle simple).

2 Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$

On peut décomposer toute fraction rationnelle en somme de fractions élémentaires plus simples, au sens où leurs dénominateurs ne feront apparaître qu'un seul polynôme irréductible chacune.

2.1 Partie entière

Théorème 3 *Soit $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$. Il existe un unique polynôme E et une unique fraction rationnelle G telle que*

$$F = E + G \text{ et } deg(G) < 0.$$

Le polynôme E est appelé la ***partie entière*** *de F. Elle est égale au quotient de la division euclidienne de P par Q.*

Méthode. Pour déterminer la partie entière d'une fraction rationnelle $F = \frac{P}{Q}$:
- Si $\deg(F) < 0$, alors la partie entière est le polynôme nul.
- Si $\deg(F) \geq 0$, alors on effectue la division euclidienne de P par Q, et la partie entière est le quotient de la division. On obtient en effet $P = QE + R$, avec $\deg(R) < \deg(Q)$, donc

$$\frac{P}{Q} = \frac{QE+R}{Q} = \frac{QE}{Q} + \frac{R}{Q} = \underbrace{E}_{\text{Partie entière}} + \underbrace{\frac{R}{Q}}_{\deg<0}.$$

Exemples.

(a) $F_0 = \dfrac{X}{X^2-4}$ a pour partie entière 0.

(b) $F_1 = \dfrac{X^5+1}{X(X-1)^2}$ a pour partie entière X^2+2X+3.

(c) $F_2 = \dfrac{1}{(X^2-1)(X^2+1)^2}$ a pour partie entière 0.

(d) $F_3 = \dfrac{4X^3}{(X^2-1)^2}$ a pour partie entière 0.

2.2 Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$

Théorème 4 *Soit $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{R}(X)$ irréductible, de partie entière E. On considère la décomposition de Q en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$:*

$$Q = \lambda \prod_{k=1}^{r} (X-\alpha_k)^{m_k} \prod_{l=1}^{s} (X^2+\beta_l X + \gamma_l)^{n_l}.$$

(les notations ont été introduites dans le cours sur les polynômes). Alors il existe des familles uniques de réels $(A_{k,i})_{\substack{1\leq k\leq r\\ 1\leq i\leq m_k}}$, $(B_{l,j})_{\substack{1\leq l\leq s\\ 1\leq j\leq n_l}}$, et $(C_{l,j})_{\substack{1\leq l\leq s\\ 1\leq j\leq n_l}}$ telles que

$$F = \underbrace{E}_{\text{Partie entière}} + \sum_{k=1}^{r} \underbrace{\sum_{i=1}^{m_k} \frac{A_{k,i}}{(X-\alpha_k)^i}}_{\substack{\text{Partie polaire}\\ \text{associée au pôle } \alpha_k}} + \sum_{l=1}^{s} \sum_{j=1}^{n_l} \frac{B_{l,j}X + C_{l,j}}{(X^2+\beta_l X+\gamma_l)^j}.$$

On appelle cette écriture la ***décomposition en éléments simples*** *(DES) de F sur $\mathbb{R}$. Elle est donc unique.*

Remarque. Dans le cas où la fraction rationnelle $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{R}(X)$ admet pour pôle d'ordre m un réel α (ce qui signifie $Q = (X-\alpha)^m Q_1$, avec $Q_1 \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q_1(\alpha) \neq 0$) on peut donc écrire F sous la forme

$$F = \frac{A_1}{(X-\alpha)} + \frac{A_2}{(X-\alpha)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(X-\alpha)^m} + F_0 = \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \frac{A_i}{(X-\alpha)^i}}_{\substack{\text{Partie polaire}\\ \text{associée au pôle } \alpha}} + F_0,$$

pour F_0 une certaine fraction rationnelle n'admettant pas α pour pôle, et où les A_i sont des réels ($i = 1, \ldots, m$).

Exemples. A, B, C, D... désignent des réels.

(a) $F_0 = \dfrac{X}{X^2-4}$ a une DES de la forme $F_0 = \underbrace{\dfrac{A}{(X-2)}}_{\substack{\text{Partie polaire}\\ \text{associée au pôle } 2}} + \underbrace{\dfrac{B}{(X+2)}}_{\substack{\text{Partie polaire}\\ \text{associée au pôle } -2}}.$

(b) $F_1 = \dfrac{X^5+1}{X(X-1)^2}$ a une DES de la forme $F_1 = \underbrace{X^2+2X+3}_{\text{Partie entière}} + \underbrace{\dfrac{A}{X}}_{\substack{\text{Partie polaire}\\ \text{associée au pôle } 0}} + \underbrace{\dfrac{B}{X-1} + \dfrac{C}{(X-1)^2}}_{\substack{\text{Partie polaire}\\ \text{associée au pôle } -1}}.$

(c) $F_2 = \dfrac{1}{(X^2-1)(X^2+1)^2}$ a une DES de la forme $F_2 = \dfrac{A}{X-1} + \dfrac{B}{X+1} + \dfrac{CX+D}{X^2+1} + \dfrac{EX+F}{(X^2+1)^2}$.

(d) $F_3 = \dfrac{4X^3}{(X^2-1)^2}$ a une DES de la forme $F_3 = \dfrac{A}{X-1} + \dfrac{B}{(X-1)^2} + \dfrac{C}{X+1} + \dfrac{D}{(X+1)^2}$.

2.3 Méthodes pratiques de la DES dans $\mathbb{R}(X)$: calcul des coefficients

2.3.1 Technique de base : multiplication/substitution

Méthode. Soit α un pôle d'ordre m d'une fraction rationnelle F. Pour déterminer le coefficient de $\frac{1}{(X-\alpha)^m}$ dans la DES de F, on multiplie F d'une part, et sa DES d'autre part, par $(X-\alpha)^m$ et on évalue l'égalité obtenue en remplaçant X par α.

Remarque. Cette technique va permettre de déterminer entièrement la DES de fractions rationnelles n'admettant que des pôles simples. Pour les pôles multiples, d'autres techniques sont données ci-dessous, mais on peut également raisonner de proche en proche : en calculant $F - \frac{A}{(X-\alpha)^m}$ (où A est le coefficient déjà trouvé), on obtient une fraction dont α est pôle d'ordre $m-1$, et on peut recommencer.

Exemples.

(a) $F_0 = \dfrac{X}{X^2-4}$ a une DES de la forme $F_0 = \frac{A}{(X-2)} + \frac{B}{(X+2)}$.

- *Calcul de A.* Le pôle $\alpha = 2$ est simple (ordre $m = 1$). On multiplie donc de part et d'autre de l'égalité ci-dessus par $(X-2)$ et on évalue en 2 la nouvelle égalité :

$$\left.\frac{X}{X^2-4} \times (X-2)\right|_{X=2} = \left.\left(\frac{A}{(X-2)} \times (X-2) + \frac{B}{(X+2)} \times (X-2)\right)\right|_{X=2}$$
$$\iff \left.\frac{X}{X+2}\right|_{X=2} = \frac{1}{2} \ = \ A.$$

- *Calcul de B.* De même, on multiplie par $(X+2)$ et on évalue en -2. On trouve $B = \frac{1}{2}$.

Ainsi, la DES de F_0 est $F_0 = \frac{1}{2(X-2)} + \frac{1}{2(X+2)}$.

(b) $F_1 = \dfrac{X^5+1}{X(X-1)^2}$ a une DES de la forme $F_1 = X^2 + 2X + 3 + \frac{A}{X} + \frac{B}{X-1} + \frac{C}{(X-1)^2}$.

- *Calculs de A et C.*
  – On multiplie par X, et on évalue en 0. On trouve $A = 1$.
  – On multiplie par $(X-1)^2$ et on évalue en 1. On trouve $C = 2$.
  Donc $F_1 = X^2 + 2X + 3 + \frac{1}{X} + \frac{B}{X-1} + \frac{2}{(X-1)^2}$.
- *Calcul de B.* On peut calculer

$$F_1 - \frac{2}{(X-1)^2} = \frac{X^5+1}{X(X-1)^2} - \frac{2}{(X-1)^2} = \frac{X^5-2X+1}{(X-1)^2X}.$$

En divisant $X^5 - 2X + 1$ par $X-1$, on obtient $X^5 - 2X + 1 = (X-1)(X^4 + X^3 + X^2 + X - 1)$, et on a donc

$$F_1 - \frac{2}{(X-1)^2} = \frac{X^4 + X^3 + X^2 + X - 1}{X(X-1)}.$$

On ré-applique la méthode ci-dessus (sur la dernière fraction, 1 n'est plus pôle double, mais simple), et on obtient $B = 3$, et donc la fin de la DES de F_1 : $F_1 = X^2 + 2X + 3 + \frac{1}{X} + \frac{3}{X-1} + \frac{2}{(X-1)^2}$.

2.3.2 Evaluation

Méthode. Lorsqu'il ne reste plus que quelques coefficients (un ou deux...) à déterminer, ou si on cherche des relations entre les coefficients, on peut substituer à X des valeurs simples.

Exemple.

(b) Lorsqu'on obtient, pour $F_1 = \dfrac{X^5+1}{X(X-1)^2}$, $F_1 = X^2 + 2X + 3 + \frac{1}{X} + \frac{B}{X-1} + \frac{2}{(X-1)^2}$ ci-dessus, au lieu de répéter la méthode multiplication/substitution, on peut substituer à X la valeur -1 : on obtient

$$F_1(-1) = \frac{(-1)^5+1}{(-1)(-1-1)^2} = (-1)^2 + 2(-1) + 3 + \frac{1}{-1} + \frac{B}{-1-1} + \frac{2}{(-1-1)^2} \iff 0 = \frac{-B}{2} + \frac{3}{2},$$

ce qui donne bien $B = 3$.

2.3.3 Parité

Méthode. Soit F est une fraction rationnelle **paire ou impaire**. Si α est un pôle d'ordre m de F, alors $-\alpha$ est un pôle d'ordre m de F. En comparant les DES de $F(X)$ et $F(-X) = \pm F(X)$, et en utilisant leur unicité, on obtient des relations entre les coefficients de la DES de F.

Exemple.

(c) $F_2 = \dfrac{1}{(X^2-1)(X^2+1)^2}$ est paire : $F_2(X) = F_2(-X)$. Donc

$$F_2(X) = \frac{A}{X-1} + \frac{B}{X+1} + \frac{CX+D}{X^2+1} + \frac{EX+F}{(X^2+1)^2} = \frac{-A}{X+1} + \frac{-B}{X-1} + \frac{-CX+D}{X^2+1} + \frac{-EX+F}{(X^2+1)^2} = F_2(-X).$$

Par unicité de la DES, on en déduit $A = -B$ et $C = E = 0$. On a donc plus que 3 coefficients à calculer au lieu de 6 :

$$F_2(X) = \frac{A}{X-1} - \frac{A}{X+1} + \frac{D}{X^2+1} + \frac{F}{(X^2+1)^2}.$$

- *Calcul de A.* On multiplie par $(X-1)$, et on évalue en $X = 1$: $A = 1/8$.
- *Calcul de F.* On multiplie par $(X^2+1)^2$, et on évalue en $X = i$: $F = -1/2$.
- *Calcul de D.* On substitue 0 à X : $-1 = -1/8 - 1/8 + D - 1/2$, donc $D = -1/4$.

Finalement, $F_2(X) = \frac{1}{8(X-1)} - \frac{1}{8(X+1)} - \frac{1}{4(X^2+1)} - \frac{1}{2(X^2+1)^2}$.

2.3.4 Limite (technique asymptotique)

Méthode. Soit F est une fraction rationnelle de **degré strictement négatif**. Alors la fonction $x \mapsto xF(x)$ a une limite finie en l'infini. On peut ainsi trouver des relations entre les coefficients de la DES de F.

Exemples.

(d) $F_3 = \dfrac{4X^3}{(X^2-1)^2}$ a une DES de la forme $F_3 = \dfrac{A}{X-1} + \dfrac{B}{(X-1)^2} + \dfrac{C}{X+1} + \dfrac{D}{(X+1)^2}$.

- *Parité.* F_3 est impaire, donc

$$-F_3(X) = \frac{-A}{X-1} + \frac{-B}{(X-1)^2} + \frac{-C}{X+1} + \frac{-D}{(X+1)^2} = \frac{-A}{X+1} + \frac{B}{(X+1)^2} + \frac{-C}{X-1} + \frac{D}{(X-1)^2} = F_3(-X).$$

  D'où $A = C$ et $B = -D$. Ainsi, $F_3 = \frac{A}{X-1} + \frac{B}{(X-1)^2} + \frac{A}{X+1} + \frac{B}{(X+1)^2}$.
- *Calcul de B.* On multiplie par $(X-1)^2$ et on évalue en 1. On obtient $B = 1$.
- *Calcul de A.* D'une part $\lim_{x\to\infty} xF_3(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^4}{(x^2-1)^2} = 4$ et d'autre part

$$\lim_{x\to\infty} xF_3(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{Ax}{x-1} + \frac{x}{(x-1)^2} + \frac{Ax}{x+1} + \frac{x}{(x+1)^2} = 2A.$$

  Donc $2A = 4$ puis $A = 2$.

Finalement,

$$F_3 = \frac{2}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{2}{X+1} + \frac{1}{(X+1)^2}.$$

3 Exercices

Exercice 1 Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

$$F = \frac{X^2+3X+1}{(X-1)^2(X-2)}, \qquad G = \frac{X^5}{X^4-1} \qquad H = \frac{4}{(X^2-1)^2}$$

Exercice 2 1. Décomposer en éléments simples $F = \frac{1}{X(X+1)}$.

2. En déduire la décomposition en éléments simples de $G = \frac{1}{X^3(X^3+1)}$.
   Indication : on rappelle que $(a^3+b^3) = (a+b)(a^2-ab+b^2)$, pour $a, b \in \mathbb{R}$.