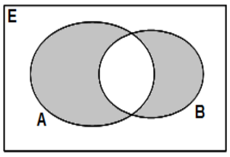
Exercice 1

1.



2. On calcule directement à partir de la définition

$$\begin{aligned}
A\Delta B &= (A\cup B)\backslash(A\cap B) = (A\cup B)\cap(A\cap B)^c, \text{ par définition de "}\backslash\text{"},\\
&= (A\cup B)\cap(A^c\cup B^c), \text{ par les lois de De Morgan},\\
&= (A\cap A^c)\cup(A\cap B^c)\cup(B\cap A^c)\cup(B\cap B^c), \text{ par distributivité de } \cap \text{ sur } \cup,\\
&= \emptyset\cup(A\cap B^c)\cup(B\cap A^c)\cup\emptyset,\\
&= \boxed{(A\cap B^c)\cup(B\cap A^c) = A\Delta B}
\end{aligned}$$

Remarque : On pouvait également raisonner par double inclusion.

3. (a) On dit que Δ est associative sur $\mathcal{P}(E)$ si, pour tous $(A,B,C)\in\mathcal{P}(E)$, $\boxed{A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C}$.

(b) $A\Delta A = (A\cup A)\backslash(A\cap A) = A\backslash A = \boxed{\emptyset = A\Delta A}$.

$A\Delta\emptyset = (A\cup\emptyset)\backslash(A\cap\emptyset) = A\backslash\emptyset = \boxed{A = A\Delta\emptyset}$.

(c) La loi Δ est interne sur $\mathcal{P}(E)$ (à deux éléments de $\mathcal{P}(E)$, on associe un nouvel élément de $\mathcal{P}(E)$). Elle est associative (par **(a)**). Si $A,B\in\mathcal{P}(E)$, il est clair que $A\Delta B = B\Delta A$, donc Δ est commutative. De plus, par **(b)**, quel que soit $A\in\mathcal{P}(E)$, $A\Delta\emptyset = A$, donc $\emptyset$ est élément neutre pour Δ. Et enfin, comme pour toute partie A, $A\Delta A = \emptyset$, tout élément admet un inverse pour Δ, lui même. Donc $\boxed{(\mathcal{P}(E),\Delta) \text{ est un groupe commutatif}}$.

4. On doit prouver deux implications.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Le sens "$B = C \implies A\Delta B = A\Delta C$" est évident.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Prouvons, réciproquement, que "$A\Delta B = A\Delta C \implies B = C$". Supposons donc que $A\Delta B = A\Delta C$, et montrons que $B = C$.

▷ Montrons que $B\subset C$. Soit $x\in B$. Distinguons deux cas : soit $x\in A$, soit $x\notin A$.

- Si $x\in A$, alors, $x\in A\cap B$. Donc $x\notin A\Delta B$ or, $A\Delta B = A\Delta C$. Donc $x\notin A\Delta C$. Mais $x\in A$, donc nécessairement, $x\in C$ (si x n'était pas dans C, comme il est dans A, il serait dans $A\Delta C$, ce qui n'est pas le cas).
- Si $x\notin A$, alors comme $x\in B$, $x\in A\Delta B$. or, $A\Delta B = A\Delta C$. Donc $x\in A\Delta C$ aussi. Comme $x\notin A$, nécessairement, $x\in C$.

Dans tous les cas, $x\in C$. Donc $B\subset C$.

Remarque : On pouvait également raisonner en utilisant la structure de groupe et l'associativité (un élément inversible est simplifiable...).

▷ Comme B et C jouent des rôles symétriques, on a aussi $C\subset B$, et donc $B = C$.

Finalement, les deux implications sont vraies, donc $\boxed{\text{les deux assertions sont bien équivalentes}}$.

5. On sait que $A\Delta B = A\cap B$. Montrons que $A = \emptyset$. Supposons que A est non vide. Soit donc $x\in A$. On a deux cas :

- soit $x\in B$, mais alors, comme $x\in A$, $x\in A\cap B$ et $x\notin A\Delta B$, ce qui contredit l'hypothèse d'égalité des deux ensembles ;
- soit $x\notin B$, et alors, $x\notin A\cap B$ et $x\in A\Delta B$, ce qui contredit aussi l'hypothèse.

Donc il ne peut pas y avoir d'élément x dans A, et donc $\boxed{A=\emptyset}$. Comme A et B jouent des rôles symétriques, on a aussi $\boxed{B=\emptyset}$.

Exercice 2

1. On pose la division :

$$\begin{array}{rrrrrr|rrr}
P = & X^4 & -5X^3 & +7X^2 & -5X & +6 & X^2 & & +1\\ \cline{7-9}
 & -(X^4 & & +X^2) & & & X^2 & -5X & +6\\ \cline{2-4}
 & & -5X^3 & +6X^2 & -5X & +6 & & & \\
 & & -(-5X^3 & & -5X) & & & & \\ \cline{3-5}
 & & & 6X^2 & & +6 & & & \\
 & & & -(6X^2 & & +6) & & & \\ \cline{4-6}
 & & & & & 0 & & &
\end{array}$$

On a donc $\boxed{P = (X^2+1)Q, \text{ avec } Q = X^2-5X+6}$. Le reste vaut 0.

2. Le polynôme P s'écrit $P = (X^2+1)(X^2-5X+6)$. On cherche les racines des deux polynômes de degré 2 du produit.

- Le polynôme X^2+1 a pour racines i et $-i$. Donc, dans $\mathbb{C}[X]$, $X^2+1 = (X-i)(X+i)$, et dans $\mathbb{R}[X]$, X^2+1 est irréductible.
- Le polynôme X^2-5X+6 a pour discriminant $\Delta = 1$, et donc pour racines $(5-1)/2 = 2$ et $(5+1)/2 = 3$. Donc, dans $\mathbb{R}[X]$ (et aussi dans $\mathbb{C}[X]$), $X^2-5X+6 = (X-2)(X-3)$.

Donc la factorisation de P est

Dans $\mathbb{C}[X]$: $\boxed{P = (X-i)(X+i)(X-2)(X-3)}$.

Dans $\mathbb{R}[X]$: $\boxed{P = (X^2+1)(X-2)(X-3)}$.

Exercice 3

1. Prouvons que la relation $\mathcal{R}_T$ est réflexive, symétrique et transitive. Cela suffit à montrer que c'est une relation d'équivalence.

- *Réflexivité.* Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $x - x = 0 = 0 \times T$. Donc, il existe $k \in \mathbb{Z}$ ($k = 0$), tel que $x - x = kT$. Donc $x\mathcal{R}_T x$, et $\boxed{\mathcal{R}_T \text{ est réflexive}}$.
- *Symétrie.* Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Supposons $x\mathcal{R}_T y$. On sait donc qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$, tel que $x - y = kT$. Alors, $y-x = -kT = (-k)T$. Donc il existe $k' \in \mathbb{Z}$ ($k' = -k$), tel que $y-x = k'T$. Donc $y\mathcal{R}_T x$, et $\boxed{\mathcal{R}_T \text{ est symétrique}}$.
- *Transitivité.* Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x\mathcal{R}_T y$, et $y\mathcal{R}_T z$. On sait donc qu'il existe $k, k' \in \mathbb{Z}$, tels que $x - y = kT$, et $y - z = k'T$. Alors,
$$x - z = (x - y) + (y - z) = kT + k'T = (k + k')T.$$
Donc il existe $k'' \in \mathbb{Z}$ ($k'' = k + k'$), tel que $x - z = k''T$. Finalement, $x\mathcal{R}_T z$, et $\boxed{\mathcal{R}_T \text{ est symétrique}}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit y un élément de la classe d'équivalence $\mathcal{C}(x)$ de x pour la relation $\mathcal{R}_0$. Alors, $x\mathcal{R}_0 y$. C'est à dire, il existe $k \in \mathbb{Z}$, $x - y = k \times 0 = 0$. Donc $x = y$. On a donc montré que si y est dans la classe d'équivalence de x, alors $y = x$. Ainsi $\mathcal{C}(x) \subset \{x\}$. Réciproquement, comme $x\mathcal{R}_0 x$, on a toujours $x \in \mathcal{C}(x)$, c'est à dire $\{x\} \subset \mathcal{C}(x)$. Donc $\boxed{\mathcal{C}(x) = \{x\}}$.

3. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On sait que l'on a les égalités $\cos(x) = \cos(y)$ et $\sin(x) = \sin(y)$ si et seulement si x est égal à y modulo 2π, c'est-à-dire si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ $x = y + 2k\pi$, ce qui se réécrit $x - y = k(2\pi)$. Donc
$$x\mathcal{S}y \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x = y + 2k\pi \iff x\mathcal{R}_{2\pi}y.$$
Ainsi, $\boxed{\mathcal{S} = \mathcal{R}_{2\pi}}$, et $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence.

Exercice 4

1. (a) On applique l'algorithme d'Euclide pour déterminer le PGCD de $a = 48$ et $b = 35$: on commence par effectuer la division euclidienne de a par b, puis la division de b par le reste de la première division...jusqu'à trouver un reste nul. Le PGCD est le dernier reste non nul.

Algorithme d'Euclide	Recherche d'une relation de Bézout
$a = b \times 1 + 13,$	$13 = a - b,$
$b = 13 \times 2 + 9,$	$9 = b - 2 \times 13 = b - 2(a - b) = 3b - 2a,$
$13 = 9 \times 1 + 4,$	$4 = 13 - 9 = (a - b) - (3b - 2a) = 3a - 4b,$
$9 = 4 \times 2 + \boxed{1},$	$\boxed{1} = 9 - 4 \times 2 = (3b - 2a) - 2(3a - 4b) = \boxed{11b - 8a}.$
$4 = 1 \times 4.$	

On trouve $\boxed{a \wedge b = 1}$. On ré-écrit ensuite les divisions effectuées (en exprimant le reste en fonction du dividende et du quotient) pour obtenir une relation de Bézout. On obtient $\boxed{-8a + 11b = 1}$. Le couple d'entiers $(x_0, y_0) = (-8, 11)$ convient donc.

(b) La relation de Bézout obtenue en **(a)** prouve que le couple (x_0, y_0) obtenu est une solution particulière de l'équation. Ensuite,

- *(condition nécessaire)* Soit (x, y) une solution quelconque. On a alors
$$\begin{array}{rcccl} 48x & + & 35y & = & 1 \\ 48x_0 & + & 35y_0 & = & 1 \\ \hline 48(x - x_0) & + & 35(y - y_0) & = & 0 \end{array} \iff 48(x - x_0) = 35(y_0 - y). \qquad (\star)$$
Ainsi, 35 divise le produit $48(x - x_0)$. Or, 35 et 48 sont premiers entre eux (par **(a)**). Donc, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - x_0 = 35k$. On remplace $x = x_0 + 35k$ dans $(\star)$. On obtient $48 \times \cancel{35}k = \cancel{35}(y_0 - y)$ et donc $y = y_0 - 48k$. On a donc montré que si (x, y) est solution de l'équation alors il existe $k \in \mathbb{Z}$, tel que $x = -8 + 35k$ et $y = 11 - 48k$.
- *(condition suffisante)* Réciproquement, si (x, y) s'écrit $(-8 + 35k, 11 - 48k)$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$, alors
$$48x + 35y = 48(-8 + 35k) + 35(11 - 48k) = (48 \times (-8) + 35 \times 11) = 1,$$
puisque $(-8, 11)$ est solution particulière. Ainsi, (x, y) est bien solution de l'équation.

Finalement, l'ensemble des solutions est donc $\boxed{\{(-8 + 35k, 11 - 48k),\ k \in \mathbb{Z}\}}$.

2. (a) Un point $M(x, y, z)$ appartient au plan $\mathcal{P}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal à $\vec{u}$, c'est-à-dire si et seulement si $\overrightarrow{AM}.\vec{u} = 0$, ce qui se traduit par
$$48(x + 11) + 35(y - 35) + 24(z + 13) = 0.$$
Une équation du plan $\mathcal{P}$ est donc $\boxed{48x + 35y + 24z - 385 = 0}$.

(b) Le plan $\mathcal{P}$ admet pour vecteur normal $\vec{u}(48, 35, 24)$. Le plan $\mathcal{P}'$ a pour équation $z - 16 = 0$, donc admet pour vecteur normal $\vec{n}(0, 0, 1)$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{n}$ ne sont pas colinéaires, donc $\boxed{\text{les plans sont sécants}}$. Leur intersection est une droite $\mathcal{D}$ dont un système d'équations est
$$\begin{cases} 48x + 35y + 24z - 385 = 0 \\ z - 16 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 48x + 35y + 24 \times 16 - 385 = 0 \\ z - 16 = 0 \end{cases} \iff \boxed{\begin{cases} 48x + 35y = 1 \\ z = 16. \end{cases}}$$

3. (a) Soit M un point de $\mathcal{D}$ à coordonnées (x, y, z) entières. Le triplet (x, y, z) vérifie le système d'équations précédent. Donc $z = 16$, et $48x + 35y = 1$. Donc (x, y) est solution de l'équation résolue en **1.**, et donc il existe $k \in \mathbb{Z}$, tel que $(x, y) = (-8 + 35k, 11 - 48k)$. On cherche les valeurs de k pour lesquels ces valeurs sont dans l'intervalle $[-100; 100]$. On trouve donc les points de coordonnées suivantes :

k	$(x, y, z) = (-8 + 35k, 11 - 48k, 16)$
0	$(-8, 11, 16)$
1	$(27, -37, 16)$
2	$(62, -85, 16)$
-1	$(-43, 59, 16)$

(b) Le point de $\mathcal{D}$ situé le plus près de l'origine est donc le point de coordonnées $\boxed{(-8, 11, 16)}$ (point M de $\mathcal{D}$ de coordonnées (x, y, z) qui minimise la distance $OM = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$).

Exercice 5

1. (a) Le polynôme $A = X^2 + X + 1$ a pour racines $\boxed{j = \exp(2i\pi/3) = -1/2 + i\sqrt{3}/2 \text{ et son conjugué } \bar{j}}$.

(b) Le complexe j est racine de A donc $A(j) = 0$, c'est-à-dire $1 + j + j^2 = 0$, ou encore $\boxed{j^2 = -1 - j}$.

(c) On utilise la forme algébrique de j.

$$aj + b = cj + d \iff a\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + b = c\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + d \iff \left(\frac{a}{2} + b\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}a}{2}\right) = \left(\frac{c}{2} + d\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}c}{2}\right)$$

$$\iff \begin{cases} \dfrac{a}{2} + b = \dfrac{c}{2} + d \\ \dfrac{\sqrt{3}a}{2} = \dfrac{\sqrt{3}c}{2} \end{cases} \iff \boxed{\begin{cases} a = c \\ b = d, \end{cases}}$$

en utilisant que deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.

2. (a) Quand on divise P par A, le reste est un polynôme R tel que $\deg(R) < \deg(A)$. Comme $\deg(A) = 2$, R est un polynôme de degré au plus 1, donc de la forme $\boxed{R = \alpha X + \beta, \text{ avec } \alpha, \beta \in \mathbb{R}}$ (puisque les polynômes A et P sont à coefficients réels, le reste de la division aussi).

(b) La division de P par A s'écrit donc $P = AQ + R$, avec $R = \alpha X + \beta$, et Q un polynôme (le quotient de la division). En évaluant cette relation en j, on obtient $P(j) = A(j)Q(j) + R(j)$. Or, $A(j) = 0$ (j est racine de A, par **1. (a)**), et $P(j) = j^n + j^m + 1$, $R(j) = \alpha j + \beta$. Ceci donne bien $\boxed{j^n + j^m + 1 = \alpha j + \beta}$.

3. (a) Si on considère la division de n par 3 dans $\mathbb{Z}$, il y a trois restes possibles, 0, 1 ou 2. Ainsi, la division euclidienne s'écrit $\boxed{n = 3k \text{ ou } n = 3k + 1 \text{ ou } n = 3k + 2}$, où k est le quotient.

(b) Pour remplir le tableau donné, on doit, dans chacun des cas,

- calculer la valeur $j^n + j^m + 1$: il suffit pour cela d'utiliser les relations $j^3 = 1$, et $j^2 = -j - 1$ (**1. (b)**). On trouve dans chaque cas des réels a et b tels que $j^n + j^m + 1 = aj + b$.
- en déduire les valeurs de α et β : on sait que $j^n + j^m + 1 = \alpha j + \beta$ (**2. (b)**), et donc, avec la troisième colonne du tableau on a une égalité de la forme $aj + b = \alpha j + \beta$, ce qui donne, par **1. (c)**, $\alpha = a$ et $\beta = b$.
- et trouver finalement $R = \alpha X + \beta$.

Détaillons le calcul de l'une des lignes : par exemple, si $n = 3k$ et $m = 3k' + 2$, on a

$$j^n + j^m + 1 = j^{3k} + j^{3k'+2} + 1 = (j^3)^k + (j^3)^{k'} \times j^2 + 1 = 1^k + 1^{k'} \times j^2 + 1 = 1 + (-j - 1) + 1 = -j + 1,$$

d'où $\alpha j + \beta = -j + 1$, ce qui donne $\alpha = -1$ et $\beta = 1$, et enfin $R = -X + 1$. Les autres lignes se traitent de la même façon.

n	m	$j^n + j^m + 1$	α	β	R
$3k$	$3k'$	3	0	3	3
$3k$	$3k' + 1$	$j + 2$	1	2	$X + 2$
$3k$	$3k' + 2$	$j^2 + 2 = -j + 1$	-1	1	$-X + 1$
$3k + 1$	$3k'$	$j + 2$	1	2	$X + 2$
$3k + 1$	$3k' + 1$	$2j + 1$	2	1	$2X + 1$
$3k + 1$	$3k' + 2$	$j^2 + j + 1 = 0$	0	0	0
$3k + 2$	$3k'$	$j^2 + 2 = -j + 1$	-1	1	$-X + 1$
$3k + 2$	$3k' + 1$	$j^2 + j + 1 = 0$	0	0	0
$3k + 2$	$3k' + 2$	$2j^2 + 1 = -2j - 1$	-2	-1	$-2X - 1$

4. Le polynôme A divise P si et seulement si le reste R dans la division de P par A est nul. Le tableau précédent montre que R est nul si et seulement si $n = 3k + 1$ et $m = 3k' + 2$ ou $n = 3k + 2$ et $m = 3k' + 1$. Ainsi,

$$\boxed{A | P \iff \begin{cases} n \equiv 1[3] \\ m \equiv 2[3] \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} n \equiv 2[3] \\ m \equiv 1[3] \end{cases}}$$