Examen d'Algèbre et Géométrie

Durée : 3h

Tout appareil électronique est interdit, notamment les calculatrices, les téléphones portables... Les documents ne sont pas non plus autorisés.

Le soin apporté à votre copie (lisibilité, présentation) et la clarté des raisonnements et de l'expression écrite prennent une part importante dans l'évaluation.

Les exercices sont indépendants. Ils peuvent être traités dans l'ordre de votre choix.

Question de cours

1. Soient E et F deux ensembles, et $u : E \to F$ une application. Quand dit-on que u est injective ? et surjective ?
2. Soient A et B deux points du plan. Montrer que la droite (AB) est l'ensemble des barycentres de A et B.

Exercice 1

On note E un ensemble, et A, B et C trois parties de E. On appelle *différence symétrique* de A et B notée $A\Delta B$, le sous-ensemble de E défini par

$$A\Delta B = \{x \in A \cup B \mid x \notin A \cap B\} = (A \cup B)\backslash(A \cap B).$$

1. Faire un dessin illustrant l'ensemble $A\Delta B$.
2. Montrer que $A\Delta B = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$.
3. (a) Que signifie l'assertion : "la loi Δ est associative sur $\mathcal{P}(E)$" ? On admet dans la suite que cette assertion est vraie (il n'est pas demandé de la prouver).
   (b) Calculer $A\Delta A$ et $A\Delta\emptyset$.
   (c) En déduire que $(\mathcal{P}(E), \Delta)$ est un groupe commutatif.
4. Montrer l'équivalence suivante : $A\Delta B = A\Delta C \iff B = C$.
5. Montrer l'implication suivante : $A\Delta B = A \cap B \implies (A = \emptyset \text{ et } B = \emptyset)$.

Exercice 2

On considère le polynôme $P = X^4 - 5X^3 + 7X^2 - 5X + 6$.

1. Effectuer la division euclidienne de P par $X^2 + 1$.
2. En déduire la décomposition de P en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 3

Soit $T \in \mathbb{R}$. On note $\mathcal{R}_T$ la relation définie, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$x\,\mathcal{R}_T\,y \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x - y = kT.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}_T$ est une relation d'équivalence (T est fixé).
2. Dans cette question, $T = 0$. Quelle est la classe d'équivalence d'un réel x ?
3. On définit maintenant une relation $\mathcal{S}$, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$x\mathcal{S}y \iff (\cos(x) = \cos(y) \text{ et } \sin(x) = \sin(y)).$$

   Trouver $T \in \mathbb{R}$, tel que $\mathcal{S} = \mathcal{R}_T$. En déduire la nature de la relation $\mathcal{S}$.

Exercice 4
Le but de cet exercice est d'utiliser les solutions d'une équation à deux inconnues entières pour résoudre un problème dans l'espace.

1. (a) Déterminer le PGCD d des entiers $a = 48$ et $b = 35$, ainsi qu'un couple d'entiers (x_0, y_0) tels que $ax_0 + by_0 = d$.
   (b) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $48x + 35y = 1$.
2. L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère le point A de coordonnées $(-11, 35, -13)$, et le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(48, 35, 24)$.
   (a) Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par A et orthogonal à $\vec{u}$. Déterminer une équation de $\mathcal{P}$. [1]
   (b) Soit $\mathcal{P}'$ le plan d'équation $z = 16$. Justifier que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants. On note dans la suite $\mathcal{D}$ la droite intersection. Donner un couple d'équations cartésiennes de $\mathcal{D}$. [2]
3. (a) Déterminer tous les points de $\mathcal{D}$ dont les coordonnées sont entières et appartiennent à l'intervalle $[-100; 100]$. [3]
   (b) En déduire les coordonnées du point de $\mathcal{D}$, à coordonnées entières, et situé le plus près de l'origine.

Exercice 5
Soient n et m deux entiers naturels tels que $n > m$. On considère les deux polynômes

$$P = X^n + X^m + 1 \qquad \text{et} \qquad A = X^2 + X + 1.$$

Le but de cet exercice est de déterminer à quelles conditions sur n et m le polynôme A divise le polynôme P. On note $j = e^{2i\pi/3}$.

1. (Questions préliminaires)
   (a) Rappeler quelles sont les racines de A (sous forme exponentielle).
   (b) Justifier que $j^2 = -1 - j$.
   (c) Si a, b, c, d sont trois nombres réels tels que $aj + b = cj + d$, que peut-on dire de a et c d'une part, et de b et d d'autre part ? Justifier.
2. (a) Justifier que le reste de la division euclidienne de P par A est de la forme $R = \alpha X + \beta$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
   (b) Montrer que α et β vérifient la relation $j^n + j^m + 1 = \alpha j + \beta$.
3. (a) Justifier que l'entier n peut s'écrire $n = 3k$ ou $n = 3k+1$ ou $n = 3k+2$, pour un certain entier k. De même, on écrit $m = 3k'$, ou $m = 3k' + 1$ ou $m = 3k' + 2$, pour un entier k', dans la suite.
   (b) Déterminer, en distinguant 9 cas, les valeurs possibles de $j^n + j^m + 1$. En déduire, dans chacun des cas, le polynôme R. Vous pourrez **reproduire sur votre copie**, puis compléter le tableau suivant pour répondre à la question.

n	m	$j^n + j^m + 1$	α	β	R
$3k$	$3k'$				
$3k$	$3k'+1$				
$3k$	$3k'+2$				
$3k+1$	$3k'$				
$3k+1$	$3k'+1$				
$3k+1$	$3k'+2$				
$3k+2$	$3k'$				
$3k+2$	$3k'+1$				
$3k+2$	$3k'+2$				

4. Conclure.

1. On donne la valeur $48 \times 11 - 35 \times 35 + 24 \times 13 = -385$.
2. $16 \times 24 = 384$.
3. $48 \times 2 = 96$, $48 \times 3 = 144$, $35 \times 2 = 70$, $35 \times 3 = 105$.