Statistique pour données fonctionnelles.
Chapitre 2. Bases mathématiques

Gaëlle Chagny
CNRS, Labo. de Maths. R. Salem, Univ. Rouen,

Université Paris Dauphine – Executive Master Statistique et Big data, 2020

Cadre et objectifs

- $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ espace probabilisé.
- $\mathcal{F}$ espace de fonctions (espace de Banach séparable).

- **Variable aléatoire fonctionnelle**

$$X : \Omega \to \mathcal{F}$$

- **Questions**
  - Quel choix pour $\mathcal{F}$?
    $\longrightarrow$ espace de Hilbert $L^2(T)$
  - Quels sont les outils pour étudier un processus stochastique X, utiles à la stat. pr données fonctionnelles ?
    - Comment adapter les notions importantes pour les v.a. réelles aux v.a. fonctionnelles ? (espérance, covariance)
    - Comment construire un tel processus, en simuler des réalisations ?

Plan

Plan

Espace de Hilbert $L^2(T)$ (1)

- **Notations**

Definition

$(L^2(T), \|\cdot\|, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ espace des fonctions de carré intégrable

$$L^2(T) = \left\{x \,:\, T \to \mathbb{R},\ \int_T x^2(t)dt < \infty\right\},$$

- $\forall x, y \in L^2(T)$, $\langle x, y\rangle = \int_T |x(t)y(t)|dt$,
- $\forall x \in L^2(T)$, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \left(\int_T x^2(t)dt\right)^{1/2}$.

- **Structure.** $(L^2(T), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ espace de Hilbert
  - $(L^2(T), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ espace muni d'un produit scalaire (forme bilinéaire symétrique définie positive),
  - $(L^2(T), \|\cdot\|)$ espace vectoriel normé complet, séparable

Espace de Hilbert $L^2(T)$ (2)

Conséquences de la structure hilbertienne.

- **Notion d'orthogonalité.**

Définition

2 fonctions $x, y \in L^2(T)$ *sont dites*

- *orthogonales si* $\langle x, y\rangle = 0$,
- *orthonormées si* $\langle x, y\rangle = 0$, *et* $\|x\| = \|y\| = 1$.

- **Existence de bases hilbertiennes dénombrables.**

Définition

$(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset L^2(T)$ *est une base hilbertienne si*

- *c'est une famille de fonctions orthonormées,*
- *et totale.*

Ainsi,

$$\forall x \in L^2(T),\ x = \sum_{j\in\mathbb{N}} \langle x, \varphi_j\rangle \varphi_j.$$

Plan

Rappels : espérance et matrice de variance d'un vecteur aléatoire

- $X = (X_1, \ldots, X_d) \in \mathbb{R}^d$ vecteur aléatoire.
- $\|X\| = (\sum_{j=1}^d X_j^2)^{1/2}$
- **Espérance de X.** Lorsque $\mathbb{E}[\|X\|] < \infty$, $\mathbb{E}[X] = {}^t(\mathbb{E}[X_1], \ldots, E[X_d])$, avec

$$\mathbb{E}[X_j] = \int_\Omega X_j(\omega) d\mathbb{P}(\omega).$$

- **Matrice de variance - covariance de X.** Lorsque $\mathbb{E}[\|X\|^2] < \infty$,

$$\Sigma_X = \begin{pmatrix} \mathrm{Var}(X_1) & \mathrm{Cov}(X_1, X_2) & \cdots & \cdots & \mathrm{Cov}(X_1, X_d) \\ \mathrm{Cov}(X_2, X_1) & \mathrm{Var}(X_2) & & & \vdots \\ \vdots & \mathrm{Cov}(X_3, X_2) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots & \mathrm{Cov}(X_{d-1}, X_d) \\ \mathrm{Cov}(X_d, X_1) & \cdots & \cdots & & \mathrm{Var}(X_d) \end{pmatrix}$$

avec $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \mathbb{E}[(X_i - \mathbb{E}[X_i])(X_j - \mathbb{E}[X_j])]$, et $\mathrm{Var}(X_i) = \mathrm{Cov}(X_i, X_i)$.

Plan

Espérance d'une variable aléatoire fonctionnelle

$$X : \Omega \to \mathcal{F} = L^2(T)$$

Définition

Si $\mathbb{E}[\|X\|] < \infty$, on définit l'espérance de X comme

- *(définition 1)*

$$\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X(\omega) d\mathbb{P}(\omega),$$

  où l'intégrale est l'intégrale de Bochner de X.

- *(définition 2)*

$$(\mathbb{E}[X])(t) = \mathbb{E}[X(t)] = \int_\Omega X(t,\omega) d\mathbb{P}(\omega),$$

- coincidence des 2 notions dans le cas $\mathcal{F} = L^2(T)$;
- $\mathbb{E}[X] \in L^2(T)$
- propriétés (classiques) :

$$\mathbb{E}[\langle X, f\rangle] = \langle \mathbb{E}[X], f\rangle, \ \|\mathbb{E}[X]\| \leq \mathbb{E}[\|X\|], \ \|\mathbb{E}[X]\|^2 \leq \mathbb{E}[\|X\|^2].$$

Plan

Opérateur de covariance (1)

$$X : \Omega \to \mathcal{F} = L^2(T)$$

Définition

Si $\mathbb{E}[\|X\|^2] < \infty$, *on définit l'opérateur de covariance de* X *comme*

$$\Gamma : f \in L^2(T) \longmapsto \Gamma f = \mathbb{E}[\langle X - \mathbb{E}[X], f\rangle (X - \mathbb{E}[X])].$$

Premières propriétés

- $\mathbb{E}[X] = 0$ (X centrée) $\Longrightarrow \Gamma : f \in \mathcal{F} \longmapsto \mathbb{E}[\langle X, f\rangle X]$.
- $\forall f \in L^2(T),\ \Gamma f \in L^2(T)$.
  $\longrightarrow$ Γ application linéaire de $L^2(T)$ dans $L^2(T)$: matrice de taille infinie !

Opérateur de covariance (2)

$$X : \Omega \to \mathcal{F} = L^2(T)$$

Proposition

Si $\mathbb{E}[\|X\|^2] < \infty$*, l'opérateur de covariance* $\Gamma : L^2(T) \to L^2(T)$ *de* X *est*

- *linéaire,*
- *continu :* $\forall f \in L^2(T),\ \|\Gamma f\| \leq \mathbb{E}[\|X\|^2]\|f\|$*,*
- *autoadjoint :* $\forall f, g \in L^2(T), \langle \Gamma f, g \rangle = \langle f, \Gamma g \rangle$*,*
- *de Hilbert-Schmidt :* $\exists (\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset L^2(T)$ *base hilbertienne telle que* $\sum_{j \in \mathbb{N}} |\Gamma \varphi_j|^2 < \infty$*.*

Corollaire

Avec les hypothèses et notations de la proposition précédente, l'opérateur de covariance Γ *de* X *est ainsi*

- *compact (l'image de la boule unité de* $L^2(T)$ *par* Γ *est relativement compacte),*
- *diagonalisable en base orthonormée (décomposition des opérateurs autoadjoints compacts).*

Fonction de covariance

$$X : \Omega \to \mathcal{F} = L^2([0,1])$$

Définition

La fonction de covariance de X est l'application

$$C : (s,t) \in [0,1]^2 \longmapsto C(s,t) = Cov(X(s), X(t)).$$

Si X est centrée ($\mathbb{E}[X] = 0$), $C(s,t) = \mathbb{E}[X(s)X(t)]$.

Proposition

Soit Γ opérateur de covariance de X, variable centrée et C sa fonction de covariance. Alors,

$$\forall f \in L^2([0,1]),\ \forall t \in [0,1],\ (\Gamma f)(t) = \int_{[0,1]} C(s,t) f(t) dt.$$

Γ est un opérateur à noyau, de noyau la fonction de covariance.

Synthèse

	Cas multivarié	Cas fonctionnel
Variable	$X \in \mathbb{R}^d$ $X = {}^t(X_1, \ldots, X_d)$	$X \in L^2(T)$ $X = \{X(t), t \in T\}$
Espérance	vecteur de moyenne $\mathbb{E}[X] = {}^t(\mathbb{E}[X_1], \ldots, \mathbb{E}[X_d])$	courbe de la moyenne $\mathbb{E}[X] = \{\mathbb{E}[X(t)], t \in T\}$
Covariance	matrice $\Sigma_X = \mathrm{Cov}(X, X)$	fonction de covariance C_X ou opérateur Γ_X $C_X(s,t) = \mathrm{Cov}(X(s), X(t))$

Plan

Décomposition de Karhunen-Loève

$$X : \Omega \to \mathcal{F} = L^2(T)$$

Diagonalisation de l'opérateur de covariance Γ en base orthonormée :

- $\exists(\psi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ base hilbertienne de $L^2(T)$ telle que
- ψ_j est un vecteur propre de Γ associé à la valeur propre λ_j : $\Gamma\psi_j = \lambda_j\psi_j$,
- avec $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \cdots \geq 0$.

Définition

La développement de Karhunen-Loève de X est son développement dans la base de fonctions propres de l'opérateur de covariance associé.

$$X = \mathbb{E}[X] + \sum_{j=1}^{\infty} \langle X, \psi_j \rangle \psi_j = \mathbb{E}[X] + \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_j} \xi_j \psi_j,$$

où $\xi_j = \langle X, \psi_j \rangle / \sqrt{\lambda_j}$.

- X centrée $\Longrightarrow \xi_j$ centrées, réduites et décorrélées ;
- décomposition inconnue en pratique (estimation possible) ;
- connue de manière théorique dans quelques cas particuliers.

Plan

Processus gaussiens (1) - Définition

$$X : \Omega \to \mathcal{F} = L^2(T)$$

Définition

La variable fonctionnelle X est dite gaussienne si $\forall r \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ et $\forall (t_1, \ldots, t_r) \in T^r$, le vecteur

$$(X(t_1), \ldots, X(t_r))$$

est gaussien, ie.

$$\forall (\alpha_j)_{1 \leq j \leq r} \subset \mathbb{R}^r, \ \sum_{j=1}^{r} \alpha_j X(t_j)$$

est une variable gaussienne.

X processus gaussien $\Longrightarrow (\xi_j)_{j \geq 1}$ indépendantes, et loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Processus gaussiens (2) - Exemples classiques

- **Mouvement brownien standard W**, restreint à $[0, 1]$.
    - trajectoires presque sûrement continues : $t \mapsto W(t)$ p.s. continue,
    - processus centré, et de fonction de covariance $C(s, t) = \min(s, t)$, $s, t \in [0, 1]$.
    - $W(0) = 0$ p.s.

  Décomposition de Karhunen-Loève (Ash et Gardner 1975) :

$$W(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\pi(j - 1/2)} \xi_j \psi_j(t), \quad \psi_j(t) = \sqrt{2} \sin(\pi(j - 1/2)t).$$

- **Pont brownien B**

$$B(t) = W(t) - tW(1).$$

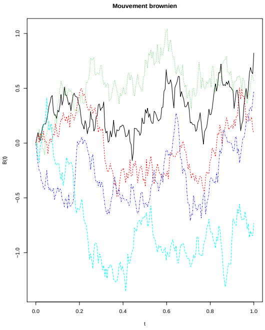
  Décomposition de Karhunen-Loève (MacNeill 1978, Deheuvels 2007) :

$$B(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\pi j} \xi_j \psi_j(t), \quad \psi_j(t) = \sqrt{2} \sin(\pi j t).$$

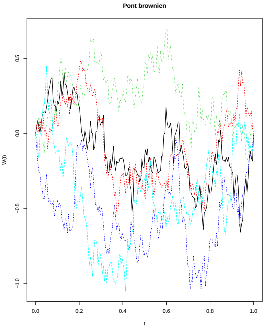
Processus gaussiens (3) - Simulation

Processus gaussiens classiques. simulation, pour une grille $t_1, \ldots, t_p$ sous la forme

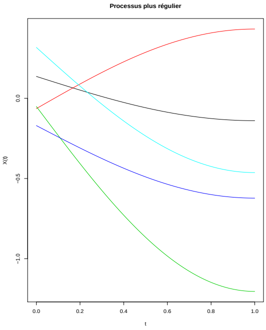
$$X(t_k) = \sum_{j=1}^{D} \sqrt{\lambda_j} \xi_j \psi_j(t_k), \quad k \in \{1, \ldots, p\}$$



Mouvement brownien



Pont brownien



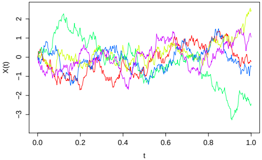
$X(t) = \xi_1 + \sqrt{2}\xi_2 \sin(\pi t/2)$
$\xi_1, \xi_2 \sim \mathcal{N}(0, 1)$ indépendantes.

Processus gaussiens (4) - Simulation

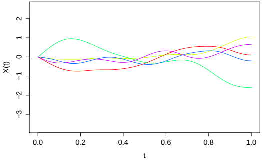
$$X(t_k) = \sum_{j=1}^{D} \sqrt{\lambda_j}\xi_j\psi_j(t_k), \quad k \in \{1, \dots, p\}, \quad \psi_j(t) = \sqrt{2}\sin(\pi(j - 0.5)t)$$

- $\xi_j \sim \mathcal{N}(0, 1)$

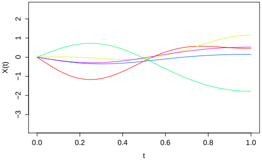
$\lambda_j = j^{-2}$



$\lambda_j = e^{-j}$

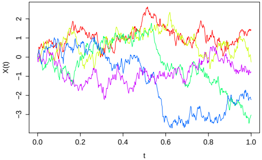


$\lambda_j = j^{-2}\mathbf{1}_{j\leq 3}$

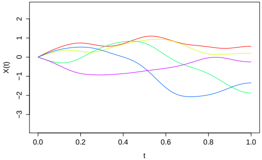


- $\xi_j \sim \mathcal{U}([-\sqrt{3}, \sqrt{3}])$

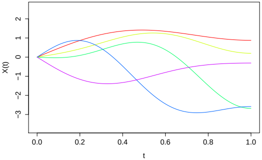
$\lambda_j = j^{-2}$



$\lambda_j = e^{-j}$



$\lambda_j = j^{-2}\mathbf{1}_{j\leq 3}$



Décomposition de Karhunen-Loève - Simulation

Méthode de simulation de processus de base de Karhunen-Loève $(\varphi_j)_{1\leq j}$ connue.

1. Choix d'une grille de discrétisation $(t_1, \dots, t_p)$.
2. Choix de $D \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.
3. Choix et calcul de coefficients aléatoires ξ_j et de valeurs propres λ_j.
4. Calcul de $X(t_k) = \sum_{j=1}^{D} \sqrt{\lambda_j}\xi_j\varphi_j(t_k)$ pour tout $1 \leq k \leq p$.

$\longrightarrow$ Importance des décompositions de fonctions dans des bases données, même si base de Karhunen-Loève inconnue en pratique.

Plan

Plan

Décomposition des fonctions dans des bases hilbertiennes (1)

$$X : \Omega \to \mathcal{F} = L^2(T)$$

- **Rappels.** Si $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ base hilbertienne de $L^2(T)$,

$$X = \sum_{j=1}^{\infty} \theta_j \varphi_j, \quad \theta_j = \langle X, \varphi_j \rangle.$$

- **Approximation - Estimation de** X dans $S_D = \mathrm{Vect}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_D\}$

$$\widetilde{X}(t) = \sum_{j=1}^{D} \widetilde{\theta}_j \varphi_j(t), \quad t \in T$$

ou encore

$$\widetilde{X}(t) = {}^t\widetilde{\theta}\Phi(t),$$

  - $\widetilde{\theta} = {}^t(\widetilde{\theta}_1, \ldots, \widetilde{\theta}_D)$ vecteur (colonne) des coefficients,
  - $\Phi(t) = {}^t(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_D(t))$ vecteur dont les éléments sont les D premiers éléments de la base évalués en t.

- **Question.** Quel choix de base ?

Décomposition des fonctions dans des bases hilbertiennes (2)

Bases classiques

1. Exemple
   - base de Fourier (fonctions périodiques de courbure régulière)
   - base de monômes, polynômes par morceaux
   - base de splines (référence pour toutes les fonctions non-périodiques)
   - base d'ondelettes (de plus en plus utilisées).

Décomposition des fonctions dans des bases hilbertiennes (2)

Bases classiques

1. Exemple
   - base de Fourier (fonctions périodiques de courbure régulière)
   - base de monômes, polynômes par morceaux
   - base de splines (référence pour toutes les fonctions non-périodiques)
   - base d'ondelettes (de plus en plus utilisées).

2. Avec R
   - Fonction `create.Nom_Base.basis` : objet créé de type `basisfd`
     - `rangeval` vecteur à 2 composantes ; intervalle $T = [a, b]$ de construction de la base ;
     - arguments suivant spécifiques à la base choisie.
   - Fonction `eval.basis` : évaluation en des points de discrétisation
     - `evalarg` vecteur de points en lesquels on évalue les fonctions ;
     - `basisobj` objet créé avec `create.Nom_Base.basis` ;
     - `Lfdobj` (pr évaluer les dérivées des fonctions de base) entier qui indique l'ordre éventuel de la dérivée concernée.
   - Tracé : `plot` (appliqué à l'objet `basisfd`) ou `matplot` (appliqué à une matrice).

Plan

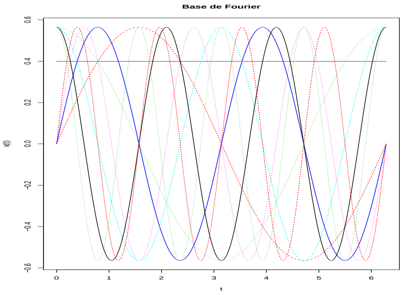
Base de Fourier (1)

Définition

La base de Fourier, ou base trigonométrique est définie de la manière suivante : $\forall t$,

$$\psi_0(t) = 1, \ \ \psi_{2k-1}(t) = \sin(k\omega t), \ \ \psi_{2k}(t) = \cos(k\omega t) \quad k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}.$$

- *période :* $2\pi/\omega$
- *coefficients de Fourier : coefficients du développement d'une fonction dans cette base.*



Code R.

```
base_Fourier<-create.fourier.basis(c(0,2*pi),9)
plot(base_Fourier,main="Base de Fourier",
                    xlab='t',ylab='x(t)')
```

Base de Fourier (2)

$$\psi_0(t) = 1,\ \ \psi_{2k-1}(t) = \sin(k\omega t),\ \ \psi_{2k}(t) = \cos(k\omega t) \quad k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}.$$

Avantages.

- théorie mathématique associée largement développée,
- base utilisée depuis longtemps en théorie du signal (signaux périodiques),
- lien entre les coefficients de Fourier d'une fonction et ceux de ses dérivées :

$$(\sin(k\omega\cdot))' = k\omega\cos(k\omega\cdot),\ \ (\cos(k\omega\cdot))' = -k\omega\sin(k\omega\cdot).$$

  - coefficients du développement de X : $(\theta_0, \theta_1, \dots)$,
  - coefficients de X' : $(0, \theta_1, -\omega\theta_2, 2\omega\theta_3, -2\omega\theta_4, \dots)$,
  - coefficients de X'' : $(0, -\omega^2\theta_1, -\omega^2\theta_2, -4\omega^2\theta_3, -4\omega^2\theta_4, \dots)$,
  - ...

- calcul rapide des coefficients de Fourier (grâce à la transformée de Fourier discrète).

$\longrightarrow$ base bien adaptée pour reconstruire des fonctions périodiques, extrêmement régulières, de courbure à peu près semblable en tout point, mais non localisée.

Bases de polynômes

- **Base de monômes**

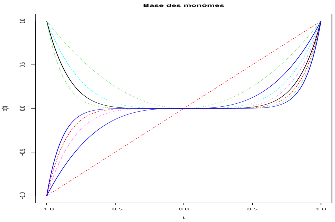
Définition

La base des monômes est définie par

$$\varphi_j(t) = (t - \omega)^j, \ j \geq 0,$$

- *ω est le paramètre de translation, souvent choisi comme le milieu de l'intervalle T,*

$\longrightarrow$ longtemps la référence pour la reconstruction de fonctions non-périodiques, en raison de la simplicité d'estimation des coefficients.



Code R.

```
base_monom<-create.monomial.basis(c(-1,1),10)
plot(base_monom, main="Base des monômes",
               xlab='t',ylab='x(t)')
```

- **Base de polynômes par morceaux**

Splines (1) - Définition

Définition

Une spline sur un intervalle $T = [a, b]$ *est une fonction polynomiale par morceaux, avec conditions de continuité sur la fonction et ses dérivées aux jointures. Elle est caractérisée par :*

- *des noeuds ("knots")* $\tau_0 = a \leq \tau_1 \leq \ldots \leq \tau_L = b$*, non nécessairement répartis régulièrement, non nécessairement distincts (points de ruptures - "breakpoints" = valeurs distinctes des* τ_l*)*
- *un ordre* m *(= degré max. des polynômes sur les sous-intervalles +1)*
- *des dérivées continues sur* T *jusqu'à l'ordre* $m - 2$*.*

spline cubique = spline d'ordre 4*.*

- Plus l'ordre est élevé, plus la spline est régulière.
- Plus le nombre de noeuds est grand, plus on gagne en précision.
- Toute combinaison linéaire de fonctions spline est encore une fonction spline.

Splines (2) - Base

Définition

Une base de spline d'ordre m et de séquence de noeuds τ est une famille de fonctions tq :

(i) *chaque fonction de base est une spline (toute combinaison linéaire de ces fonctions est donc encore une fonction spline) ;*

(ii) *toute spline d'ordre m et de séquence de noeuds τ peut s'exprimer comme combinaison linéaire de ces fonctions de base ;*

(iii) *les fonctions de bases sont linéairement indépendantes (pas nécessairement orthonormées).*

- existence de plusieurs bases classiques de splines,
- base de splines : les plus utilisées en analyse de données fonctionnelles (pr des fonctions non périodiques),
- exemple le plus célèbre : Base de B-splines (de Boor, 2001).

Splines (3) - Base de B-splines

$\longrightarrow$ pas de définition précise ici, pour simplifier...

Proposition

Une base de B-splines est entièrement caractérisée par

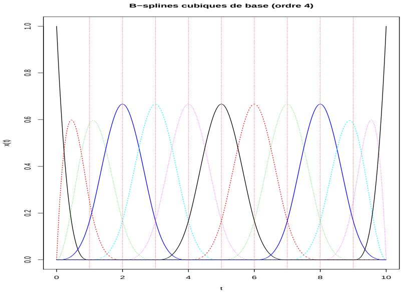
- *un ordre m ou, de manière équivalente, le degré maximal $m-1$ des morceaux de polynômes.*
- *une séquence de noeuds τ, qui entraine la connaissance des points de rupture (jointure) des sous-intervalles.*

Quelques propriétés.

- Nombre de fonctions de base = ordre + nombre de noeuds intérieurs (τ_0 et τ_L ne sont pas comptés).
- Support compact : une fonction B-spline de base d'ordre m est non-nulle et positive sur au plus m sous-intervalles, adjacents.
- Forme : la forme des B-splines est définie par les noeuds. Pour des noeuds équidistants par exemple, toutes les fonctions de base ont la même forme.
- Baisse de continuité aux extrémités de l'intervalle T.
- Somme des valeurs des fonctions de bases B-spline en tout point t égale à 1.
- Base de Riesz.

Splines (3) - Base de B-splines

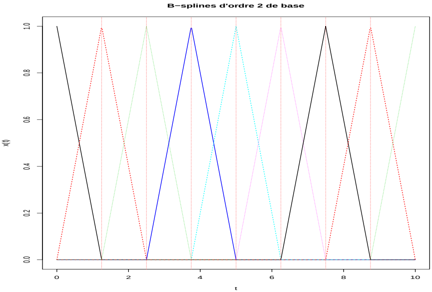
Exemple de bases B-splines noeuds équidistants tous distincts sur $[0, 10]$.



ordre 4 - 13 fonctions de base

Code R.

```
Bsplines4 <- create.bspline.basis(rangeval=c(0,10),nbasis=13)
plot(Bsplines4,main="B-splines cubiques
        de base (ordre 4)",xlab='t',ylab='x(t)')
```



ordre 2 - 9 fonctions de base

Code R.

```
Bsplines2<-create.bspline.basis(rangeval=c(0,10), nbasis=9,
           norder=2)
plot(Bsplines2,main="B-splines d'ordre 2
          de base",xlab='t',ylab='x(t)')
```

Bases d'ondelettes (1)

Härdle *et al. 2009*

Propriétés

- bases de Riesz de $L^2(T)$

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2}\psi(2^j t - k), \quad t \in \mathbb{R}.$$

où ψ est la *mère des ondelettes*.

- approximation “en fréquence” des fonctions (comme la base de Fourier)
- localisation (comme les splines)

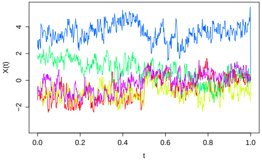
- analyse multirésolution : le coefficient du développement d'indices j, k apporte des informations sur la fonction au voisinage de la position $2^{-j}k$ (localisation) à l'échelle 2^{-j} (fréquence proche de 2^j).

Bases d'ondelettes (2) - Simulations

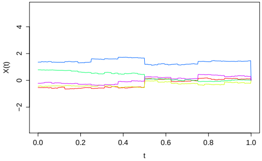
Courbes aléatoires : $(\psi_{j,k})_{j,k}$ base de Haar ; $X(t) = \sum_{j\geq 0} \sqrt{\lambda_j} \sum_{k=1}^{2^j} \xi_{j,k}\psi_{j,k}(t)$.

- $\xi_j \sim \mathcal{N}(0,1)$

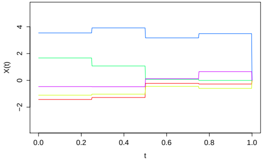
$\lambda_j = j^{-2}$



$\lambda_j = e^{-j}$

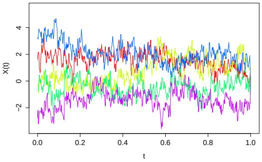


$\lambda_j = j^{-2}\mathbf{1}_{j\leq 3}$

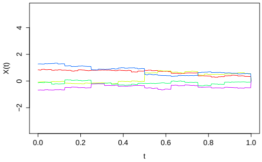


- $\xi_j \sim \mathcal{U}([-\sqrt{3}, \sqrt{3}])$

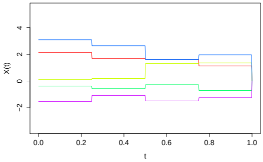
$\lambda_j = j^{-2}$



$\lambda_j = e^{-j}$



$\lambda_j = j^{-2}\mathbf{1}_{j\leq 3}$



Plan

Objets fonctionnels avec R (1) - package fda

Création et représentation d'objets fonctionnels comme combinaisons linéaires de fonctions de base $X(t) = \sum_{j=1}^{D} \theta_j \varphi_j(t)$

1. **Construction de la base** $(\varphi_j)_j$. `create.Nom_Base.basis` : objet créé de type `basisfd`
    - Arguments
        - `rangeval` vecteur à 2 composantes ; intervalle $T = [a, b]$ de construction de la base ;
        - arguments suivant spécifiques à la base choisie.
    - Évaluation en des points de discrétisation : fonction `eval.basis`
        - `evalarg` vecteur de points en lesquels on évalue les fonctions ;
        - `basisobj` objet créé avec `create.Nom_Base.basis` ;
        - `Lfdobj` (pr évaluer les dérivées des fonctions de base) entier qui indique l'ordre éventuel de la dérivée concernée.
    - Tracé : `plot` (appliqué à l'objet `basisfd`) ou `matplot` (appliqué à une matrice).

2. **Définition des coefficients** $(\theta_j)_j$. vecteur de même longueur que le nombre de fonctions de base créées.
    - Exemple : simulation de variables aléatoires de lois données comme `rnorm, rpois, rexp`. liste complète : `help(distributions)`.

Objets fonctionnels avec R (2) - package fda

Création et représentation d'objets fonctionnels comme combinaisons linéaires de fonctions de base $X(t) = \sum_{j=1}^{D} \theta_j \varphi_j(t)$

3. **Création de l'objet fonctionnel**. Fonction `fd`
    - Arguments
        - `coeff` le vecteur des coefficients ;
        - `basisobj` l'objet créé avec `create.Nom_Base.basis`.
    - Objet créé de la classe `fd`.

4. **1ers exemples d'utilisation de l'objet : évaluation et tracé.**
    - `plot` : pr représenter l'objet fonctionnel, et ses dérivées (argument `LfdObj`).
    - `eval.fd` : pr évaluer la fonction ou ses dérivées en des pts d'une grille (comme `eval.basis`)

5. **Cas de la création d'un échantillon ou/et de données multidimensionnelles.** même méthode ; seule différence : simuler plus de coefficients, et les ordonner sous forme matricielle voulue (en utilisant `matrix` ou `array`).