Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45 rue des Saints-Pères 75006 Paris
2011-2012 **LICENCE L3**

Algèbre Linéaire et Bilinéaire

Feuille d'exercices n°3 : Formes quadratiques, espaces euclidiens, matrices symétriques

• Formes quadratiques

Exercice 1. *(Exemples sur $\mathbb{R}^3$)* On considère les formes quadratiques q_i, $i = 1, 2, 3$, définies pour $x = {}^t(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ par

$$q_1(x) = x_1^2+6x_2^2+6x_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3,\ \ q_2(x) = x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3,\ \ q_3(x) = 2x_1x_3-2x_2x_3-x_3^2+x_2^2.$$

Pour chacune d'entre elles, répondre aux questions suivantes :
1) Déterminer la forme bilinéaire symétrique associée.
2) Donner la matrice de q_i dans la base canonique.
3) Appliquer l'algorithme de Gauss à la forme quadratique q_i et donner sa signature.
4) Donner l'écriture matricielle qui découle des questions précédentes.

Exercice 2. *(Exemples sur $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$)* Calculer la signature des formes quadratiques suivantes $((x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R})$:

1) $\forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ q_a((x_1, x_2, x_3)) = x_1^2 + (1 + a)x_2^2 + (1 + a + a^2)x_3^2 + 2x_1x_2 - 2ax_2x_3,\ a \in \mathbb{R}$;
2) $\forall (x_i)_i \in \mathbb{R}^4,\ q_\lambda((x_1, x_2, x_3, x_4)) = x_1^2 + (4 + \lambda)x_2^2 + (1 + 4\lambda)x_3^2 + \lambda x_4^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3,$
$+4(1 - \lambda)x_2x_3 + 2\lambda x_2x_4 + (1 - 4\lambda)x_3x_4,\ \lambda \in \mathbb{R}$;
3) $\forall (x_i)_i \in \mathbb{R}^n,\ q((x_1, \ldots, x_n)) = \displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} ix_ix_j$;
4) $\forall (x_i)_i \in \mathbb{R}^n,\ q((x_1, \ldots, x_n)) = \displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} \min(i, j)x_ix_j$;

(pour 4) on pourra écrire la matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$).

Exercice 3. *(Exemple sur $\mathbb{R}_n[X]$)* On considère l'application q définie pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ par

$$q(P) = P(0)P(1).$$

1) Montrer que q est une forme quadratique (on donnera la forme bilinéaire symétrique associée).
2) Soit $P = \sum_{i=0}^n a_iX^i \in \mathbb{R}_n[X]$. Exprimer $q(P)$ en fonction des coefficients a_i. En déduire la signature de q.

Exercice 4. *(Exemple sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$)* On définit

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ a, b, c, d \in \mathbb{R},\ a - d = 0 \right\} \text{ et } J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ainsi que l'application $q : M \in V \mapsto q(M) = \mathrm{Tr}(MJM)$.
1) Donner une base simple $\mathcal{B}$ de V.
2) Montrer que q est une forme quadratique. Donner sa matrice dans la base choisie.
3) Déterminer la signature de q.
4) Déterminer l'orthogonal (pour la forme quadratique q) du sous-espace F suivant :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix},\ a, d \in \mathbb{R},\ a - d = 0 \right\}.$$

• **Espaces euclidiens**

Exercice 5. *(Exemple sur $\mathbb{R}_2[X]$)* On considère $E = \mathbb{R}_2[X]$, et l'on définit l'application

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & E^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (P,Q) & \mapsto & P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2). \end{array}$$

1) Montrer que φ est un produit scalaire sur E. Quelle est la signature de la forme quadratique q associée à φ ?
2) Soit $F = \{P \in E,\ P(0) = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E, et en donner une base.
3) Déterminer une base orthonormale de F pour le produit scalaire φ.
4) Donner une base de $F^\perp$.

Exercice 6. *(Exemple sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$)* On définit pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}({}^tAB)$.
1) Montrer que $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \langle .,.\rangle)$ est un espace euclidien.
2) Déterminer les orthogonaux de $\mathcal{D}_n$, $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$ qui désignent respectivement l'ensemble des matrices diagonales, symétriques et antisymétriques.

Exercice 7. *(Exemple sur $\mathcal{C}(\mathbb{R})$)* On note $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, N une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$ et

$$E = \left\{ f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}),\ \mathbb{E}[f^2(N)] < \infty \right\}.$$

1) Montrer que pour tout couple $(f,g) \in E$, la variable $f(N)g(N)$ admet une espérance. On la note $\langle f, g\rangle$ dans la suite.
2) Montrer que E est un sous espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ contenant $\mathbb{R}[X]$. Rappeler la valeur de $I_n = \int_{\mathbb{R}} x^n e^{-x^2/2} dx$, $n \in \mathbb{N}$.
3) Montrer que $\langle .,.\rangle$ est un produit scalaire sur E.
4) Soit $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$, pour le produit scalaire $\langle .,.\rangle$ obtenu par le procédé de Gram-Schmidt à partir de la base canonique.
   (a) Calculer P_0 et P_1.
   (b) Montrer que pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, il existe a_k, b_k, c_k des réels tels que

$$XP_k = a_k P_{k+1} + b_k P_k + c_k P_{k-1}.$$

Exercice 8. *(Un contre exemple en dimension infinie)* On note E l'ensemble des suites $(x_n)_{n\geqslant 0}$ de nombres réels telles que la série $\sum x_n^2$ soit convergente.
1) Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2) Pour $(x,y) \in E \times E$, on pose $\langle x, y\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E. On suppose par la suite que E est muni de cette structure euclidienne.
3) On note F l'ensemble des suites de nombres réels dont les termes sont nuls à partir d'un certain rang. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
4) Déterminer $F^\perp$ et $F^{\perp\perp}$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 9. Pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on définit $S(P,Q) = \int_0^1 P(x)Q(x)dx$.
1) Montrer que S est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2) Donner une base orthonormée du sous espace $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.
3) Calculer $\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (x^2 - ax - b)^3 dx$.

Exercice 10. Soit $(E, \langle .,.\rangle)$ un espace euclidien. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si $p \circ p = p$, et pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$.

Exercice 11. Soit $(E, \langle .,.\rangle)$ un espace euclidien. Soit u un endomorphisme symétrique de E. On rappelle que cela signifie que pour tout $(x,y) \in E^2$, $\langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle$.
1) Montrer que $\mathrm{Im}(u) = (\mathrm{Ker}(u))^\perp$. En déduire que $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont supplémentaires dans E.
2) Montrer que les sous-espaces propres de u sont orthogonaux deux à deux.
3) Soit F un sous-espace de E stable par u. Montrer que $F^\perp$ est encore stable.

• **Matrices symétriques positives**

Exercice 12. Pour une matrice symétrique, le fait d'avoir tous ses coefficients positifs est-il une condition suffisante pour que la matrice soit positive ? Est-ce une condition nécessaire ?

Exercice 13. *(Matrice de Hilbert)* Soit $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice de terme général $a_{i,j} = (i+j+1)^{-1}$. Montrer que cette matrice est symétrique définie positive. *Indication :* on pourra remarquer que $a_{i,j} = \int_0^1 t^{i+j} dt$.

Exercice 14. *(Caractérisation des matrices symétriques positives)* Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (ensemble des matrices symétriques à coefficients réels). Montrer que A est positive (respectivement définie positive) si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives (respectivement strictement positives).

Exercice 15. On se place dans $\mathbb{R}^4$ muni de la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4), et on considère

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Montrer que 0 est valeur propre de A, et que $(e_1 - e_2, e_2 - e_3)$ est une base de E_0. Déterminer ensuite une base orthonormale de E_0 pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^4$, obtenue à partir de cette première base par le procédé de Gram-Schmidt.
2) Démontrer que A admet aussi deux autres valeurs propres non nulles, l'une λ_+ positive et l'autre λ_- négative, et trouver les sous-espaces propres associés.
3) En déduire une matrice orthogonale P telle que la matrice ${}^tPAP$ est diagonale.
4) On note q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est A. Que vaut $q(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^4$? Quelle est la signature de q ?

Exercice 16. Soient $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique non nulle, et $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive.
1) (a) La matrice T est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$? et S ?
(b) Montrer que $\det(I_n + T) \geq 1$.
2) Prouver que $\det(S + T) \geq \det(S)$. On pourra par exemple se ramener au résultat montré à la question précédente.

Exercice 17. *(Inégalité de Hadamard)* L'objectif est de démontrer que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a l'inégalité

$$|\det(M)| \leq \prod_{i=1}^{n} \|C_i\|,$$

où $C_1, \dots, C_n$ désigne les colonnes de M, et $\|C_i\| = {}^tC_iC_i$ (norme issue du produit scalaire usuel).
1) Prouver le résultat dans le cas où $M \notin GL_n(\mathbb{R})$.
2) On suppose maintenant que $M \in GL_n(\mathbb{R})$.
(a) Montrer que la matrice $A = {}^tMM$ est symétrique définie positive.
(b) Montrer que pour toute matrice carrée $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$ symétrique définie positive,

$$\det(A) \leq \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

(c) Conclure.