Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45 rue des Saints-Pères 75006 Paris
2011-2012 **LICENCE L3**

Algèbre Linéaire, Complément à la Feuille d'exercices n°2 : Polynômes.

Exercice 1. 1. Pour chaque couple de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ suivant, donner le *pgcd* et le *ppcm* :

$$(X(X-1),(X-1)(X+2)), \quad (2X+2, X^2+2X+1), \quad (X^p, X^q), \;\; p,q \in \mathbb{N}.$$

2. Soient $P_1, P_2, P \in \mathbb{R}[X]$, tels que P_1 et P_2 divisent P. Montrer que si P_1 et P_2 sont premiers entre eux, alors le produit P_1P_2 divise aussi P.

Exercice 2. Parmi les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}[X]$, lequel est un idéal ?
- $I_1 = \{P \in \mathbb{R}[X],\ P(i+\sqrt{2}) \notin \mathbb{R}\}$,
- $I_2 = \{P \in \mathbb{R}[X],\ P(i+\sqrt{2}) \in \mathbb{R}\}$,
- $I_3 = \{P \in \mathbb{R}[X],\ P(i+\sqrt{2}) = 0\}$.

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$, et u un endomorphisme de E. Soit P un polynôme annulateur de u. On écrit $P = \prod_{i=1}^r P_i^{m_i}$ la décomposition de P en produit de polynômes irréductibles distincts. Montrer qu'il existe une base de E, telle que, dans cette base, la matrice de u est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & (0) \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & A_r \end{pmatrix}, \text{ avec } A_i \in \mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{K})\ n_i = \dim \operatorname{Ker}(P_i^{m_i}(u)),\ i = 1, \dots, r.$$

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$, et u un endomorphisme de E, tel que

$$(u^2 - u - 2Id_E) \circ (u + 2Id_E)^2 = 0, \qquad \text{et} \qquad (u^2 - u - 2Id_E) \circ (u + 2Id_E) \neq 0.$$

(1) Montrer que $E = \operatorname{Ker}(u + Id_E) \oplus \operatorname{Ker}(u - 2Id_E) \oplus \operatorname{Ker}(u + 2Id_E)^2$.

(2) Justifier que $\operatorname{Ker}(u + 2Id_E) \neq \{0\}$, et que $\operatorname{Ker}(u + 2Id_E) \neq \operatorname{Ker}(u + 2Id_E)^2$.

(3) En déduire que l'endomorphisme u n'est pas diagonalisable.

Exercice 5. Parmi les polynômes ci-dessous, déterminer celui qui peut-être le polynôme minimal d'une matrice réelle trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ mais non diagonalisable :

$$P = X^3 - X^2 + X - 1, \;\; Q = X^3 - X^2 - X + 1, \;\; R = X^3 - X.$$

Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45 rue des Saints-Pères 75006 Paris
2011-2012 **LICENCE L3**

Algèbre Linéaire, Complément à la Feuille d'exercices n°2 : Polynômes.

Exercice 1. 1. Pour chaque couple de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ suivant, donner le *pgcd* et le *ppcm* :

$$(X(X-1),(X-1)(X+2)), \quad (2X+2, X^2+2X+1), \quad (X^p, X^q), \;\; p,q \in \mathbb{N}.$$

2. Soient $P_1, P_2, P \in \mathbb{R}[X]$, tels que P_1 et P_2 divisent P. Montrer que si P_1 et P_2 sont premiers entre eux, alors le produit P_1P_2 divise aussi P.

Exercice 2. Parmi les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}[X]$, lequel est un idéal ?
- $I_1 = \{P \in \mathbb{R}[X],\ P(i+\sqrt{2}) \notin \mathbb{R}\}$,
- $I_2 = \{P \in \mathbb{R}[X],\ P(i+\sqrt{2}) \in \mathbb{R}\}$,
- $I_3 = \{P \in \mathbb{R}[X],\ P(i+\sqrt{2}) = 0\}$.

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$, et u un endomorphisme de E. Soit P un polynôme annulateur de u. On écrit $P = \prod_{i=1}^r P_i^{m_i}$ la décomposition de P en produit de polynômes irréductibles distincts. Montrer qu'il existe une base de E, telle que, dans cette base, la matrice de u est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & (0) \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & A_r \end{pmatrix}, \text{ avec } A_i \in \mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{K})\ n_i = \dim \operatorname{Ker}(P_i^{m_i}(u)),\ i = 1, \dots, r.$$

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$, et u un endomorphisme de E, tel que

$$(u^2 - u - 2Id_E) \circ (u + 2Id_E)^2 = 0, \qquad \text{et} \qquad (u^2 - u - 2Id_E) \circ (u + 2Id_E) \neq 0.$$

(1) Montrer que $E = \operatorname{Ker}(u + Id_E) \oplus \operatorname{Ker}(u - 2Id_E) \oplus \operatorname{Ker}(u + 2Id_E)^2$.

(2) Justifier que $\operatorname{Ker}(u + 2Id_E) \neq \{0\}$, et que $\operatorname{Ker}(u + 2Id_E) \neq \operatorname{Ker}(u + 2Id_E)^2$.

(3) En déduire que l'endomorphisme u n'est pas diagonalisable.

Exercice 5. Parmi les polynômes ci-dessous, déterminer celui qui peut-être le polynôme minimal d'une matrice réelle trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ mais non diagonalisable :

$$P = X^3 - X^2 + X - 1, \;\; Q = X^3 - X^2 - X + 1, \;\; R = X^3 - X.$$