Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45 rue des Saints-Pères 75006 Paris
2011-2012 **LICENCE L3**

Algèbre Linéaire et Bilinéaire

Feuille d'exercices n°1 : Révisions

Dans toute la feuille, k désigne un corps (commutatif) quelconque, par exemple $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et n désigne un entier naturel non nul.

Exercice 1. *(Indice d'un endomorphisme)* Soit E un $k-$espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$.

(1) Montrer que la suite $(\mathrm{Ker}(u^i))_{i\in\mathbb{N}}$ est croissante et que la suite $(\mathrm{Im}(u^i))_{i\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

(2) Montrer qu'il existe un indice $j \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Ker}(u^j) = \mathrm{Ker}(u^{j+1})$.
On peut donc définir r le plus petit entier tel que $\mathrm{Ker}(u^r) = \mathrm{Ker}(u^{r+1})$. Cet entier s'appelle l'*indice* de l'endomorphisme u.

(3) Justifier que pour tout $0 \leq j < r$, $\mathrm{Ker}(u^j) \subsetneq \mathrm{Ker}(u^{j+1})$, et que pour tout $j \geq r$, $\mathrm{Ker}(u^j) = \mathrm{Ker}(u^{j+1})$.

(4) Montrer que $\mathrm{Im}(u^r) = \mathrm{Im}(u^{r+1})$ et que l'on a aussi $\mathrm{Im}(u^r) \oplus \mathrm{Ker}(u^r) = E$.

(5) Montrer que la suite des sauts de dimensions $(\dim \mathrm{Ker}(u^{i+1}) - \dim \mathrm{Ker}(u^i))_{i\in\mathbb{N}}$ est décroissante. *Indication* : on pourra justifier que $\dim \mathrm{Ker}(u^{i+1}) - \dim \mathrm{Ker}(u^i) = \dim(\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u^i))$.

Exercice 2. Soit $E \neq \{0\}$ un $k-$espace vectoriel, et $u \in \mathcal{L}(E)$.

(1) On suppose que u laisse stable toutes les droites vectorielles de E. Montrer que u est une homothétie.

(2) On suppose E de dimension finie n. On suppose aussi que u laisse stable tous les sous espaces vectoriels de dimension p de E (pour $p \in \{1, \ldots, \dim(E)\}$ fixé). Montrer que u est une homothétie.

(3) *Application* : On suppose que pour tout $v \in \mathcal{L}(E)$, $u \circ v = v \circ v$. Montrer que u est une homothétie.

Exercice 3. Soit E un $k-$espace vectoriel de dimension finie.

(1) Soit φ une forme linéaire non nulle sur E. Montrer que le noyau de φ est un hyperplan de E.

(2) Soit H un hyperplan de E. Construire une forme linéaire sur E dont le noyau est H.

Exercice 4. (1) Soit A une matrice carrée de taille n, triangulaire supérieure, avec des 0 sur la diagonale. Montrer que A est nilpotente (sans utiliser le théorème de Cayley-Hamilton). *Indication* : considérer l'endomorphisme canoniquement associé à A.

(2) Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5. Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose que A et B sont semblables dans $M_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'elles le sont aussi dans $M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 6. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Calculer le déterminant, dit de *Vandermonde*,

$$V(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \det((\lambda_i^{j-1})_{1\leqslant i,j\leqslant n}).$$