Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45 rue des Saints-Pères 75006 Paris
2011-2012 **LICENCE L3**

Algèbre Linéaire : Corrigé du Devoir Maison n°1

Exercice.
1) Soit λ une valeur propre de A, et $X = (x_k)_{k=1,\dots,n}$ un vecteur propre associé. Alors $(A-\lambda I_n)X = 0$, c'est-à-dire,

$$\begin{cases} -\lambda x_1 & + & x_2 & = & 0 & & \\ x_1 & - & \lambda x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_2 & - & \lambda x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{k-2} & - & \lambda x_{k-1} & + & x_k & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{n-2} & - & \lambda x_{n-1} & + & x_n & = & 0 \\ x_{n-1} & - & \lambda x_n & = & 0 & & \end{cases}$$

En notant, $x_0 = x_{n+1} = 0$, on a bien, la relation

$$\forall k \in \{2,\dots,n+1\},\ x_k - \lambda x_{k-1} + x_{k-2} = 0. \tag{1}$$

2) L'égalité (1) est une relation de récurrence linéaire pour le "début" de la suite $(x_k)_k$. L'équation caractéristique associée est $r^2 - \lambda r + 1 = 0$. Si $\lambda = 2\cos(\theta)$, le discriminant est $\Delta = 4\sin^2(\theta)$, et en supposant $\theta \neq 0[\pi]$, il y a deux racines : $r_1 = \exp(i\theta)$, $r_2 = \exp(-i\theta)$. Donc, la suite (x_k) est de la forme

$$\forall k \in \{0,\dots,n\},\ x_k = \alpha r_1^k + \beta r_2^k = \alpha\exp(ik\theta) + \beta\exp(-ik\theta),$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Comme $x_0 = 0$, on en déduit $\alpha + \beta = 0$, et donc,

$$\forall k \in \{0,\dots,n\},\ x_k = \alpha\left(\exp(ik\theta) - \exp(-ik\theta)\right) = 2\alpha\sin(k\theta).$$

De plus, $x_{n+1} = 0$, donc $2\alpha\sin((n+1)\theta) = 0$, et donc $\sin((n+1)\theta) = 0$ (on n'a pas $\alpha = 0$, car $X = (x_k)$ est un vecteur propre, donc non nul). On obtient donc $\theta = l\pi/(n+1)$, $l \in \{1,\dots,n\}$. En résumé, les réels

$$\lambda_l = 2\cos\left(\frac{l\pi}{n+1}\right),\ \ l \in \{1,\dots,n\},$$

sont des valeurs propres pour A et pour chaque l,

$$X_l = \left(\sin\left(\frac{kl\pi}{n+1}\right)\right)_{k=1,\dots,n}$$

est un vecteur propre associé à λ_l.
3) On a donc trouvé à la question précédente n valeurs propres distinctes pour la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On en déduit qu'elle est diagonalisable. On pouvait aussi remarquer que A était symétrique, à coefficients réels, ce qui permettait directement d'affirmer que A était diagonalisable.

Problème.
1) L'application $\Gamma : v \in \mathcal{L}(E) \mapsto u \circ v - v \circ u \in \mathcal{L}(E)$ est linéaire comme composée d'applications linéaires. On a $\mathcal{C}(u) = \mathrm{Ker}(\Gamma)$, c'est donc bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$. Si v appartient à $\mathbb{R}[u]$, alors il existe un entier d et des réels $(a_k)_{k=0,\dots,d}$ tels que $v = \sum_{k=0}^d a_k u^k$. Donc,

$$u \circ v = u \circ \left(\sum_{k=0}^d a_k u^k\right) = \sum_{k=0}^d a_k(u \circ u^k) = \sum_{k=0}^d a_k(u^k \circ u) = \left(\sum_{k=0}^d a_k u^k\right) \circ u = v \circ u,$$

car toute puissance u^k de u commute avec u. Donc $v \in \mathcal{C}(u)$. Ainsi, $\mathbb{R}[u] \subset \mathcal{C}(u)$.

2) a) La famille $\{x_0, u(x_0), \ldots, u^{n-1}(x_0)\}$ est libre, de cardinal $n = \dim(E)$, donc c'est une base de E. En particulier, c'est une famille génératrice. Donc, tout vecteur de E, comme $v(x_0)$, se décompose comme combinaison linéaire des vecteurs de cette famille. On choisit les a_i comme les coefficients de cette combinaison linéaire.

b) On utilise l'indication : on commence par montrer l'égalité pour les vecteurs de la base

$$\{x_0, u(x_0), \ldots, u^{n-1}(x_0)\}.$$

Soit $0 \leqslant p \leqslant n-1$. Comme $v \in \mathcal{C}(u)$, v commute avec u^p (cf. question 1)). Donc, compte-tenu de a) :

$$v(u^p(x_0)) = u^p(v(x_0)) = u^p\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(x_0)\right) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^p(u^k(x_0)) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(u^p(x_0))\,.$$

D'où le résultat pour les vecteurs de la base. Maintenant, si x est un vecteur quelconque de E, x s'écrit comme combinaison linéaire des éléments de la base, et par linéarité de v, le résultat est encore vrai pour x (une application linéaire est entièrement caractérisée par l'image d'une base).

c) Nous venons donc de démontrer que $v = \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k$ (puisque l'égalité de la question précédente est vrai quel que soit x dans E). Donc tout élément $v \in \mathcal{C}(u)$ est un polynôme en u, ie $\mathcal{C}(u) \subset \mathbb{R}[u]$. D'où le résultat car l'autre inclusion est toujours vraie (cf. question 1)).

3) a) D'après la question 2), il suffit de montrer que $\{x_0, u(x_0), \ldots, u^{n-1}(x_0)\}$ est une base de E, avec le vecteur x_0 suggéré par l'énoncé. Puisque c'est une famille de cardinal $n = \dim(E)$, il suffit encore de montrer qu'elle est libre. Soient alors $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(x_0) = 0$. On a, étant donnée l'hypothèse sur u :

$$u^k(x_0) = u^k\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} u^k(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k x_i\,.$$

D'où :

$$0 = \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda_i^k\right) x_i\,.$$

Enfin, toujours par hypothèse, $\{x_1, \ldots, x_n\}$ est une famille libre, car formée de vecteurs propres de u associé à des valeurs propres distinctes. Donc, par identification, $\sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda_i^k = 0$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$. On obtient donc le système $n \times n$ suivant :

$$\begin{cases} a_0 + a_1\lambda_1 + a_2\lambda_1^2 + \cdots + a_{n-1}\lambda_1^{n-1} & = & 0 \\ a_0 + a_1\lambda_2 + a_2\lambda_2^2 + \cdots + a_{n-1}\lambda_2^{n-1} & = & 0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots & \vdots & \vdots \\ a_0 + a_1\lambda_n + \cdots\cdots\cdots + a_{n-1}\lambda_n^{n-1} & = & 0 \end{cases}$$

On a un système en les inconnues a_i, de la forme

$$MA = 0 \text{ avec } A = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} \text{ et } M = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de la matrice M est le déterminant de Vandermonde

$$V(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i).$$

Celui-ci est non nul car les λ_i sont 2 à 2 distincts. Donc M est inversible et donc le système $MA = 0$ se réécrit $A = M^{-1}0 = 0$. Le vecteur $A = 0$ est donc la seule solution (rappel : on dit que le système est de Cramer) et signifie $a_0 = \cdots = a_{n-1} = 0$. Cela prouve finalement que la famille $\{x_0, u(x_0), \ldots, u^{n-1}(x_0)\}$ est libre.

b) Par hypothèse, u admet pour minimal le polynôme X^n. Donc X^{n-1} n'est pas annulateur. Donc il existe $x_0 \in E$, tel que $u^{n-1}(x_0) \neq 0$. On a alors aussi $u^k(x_0) \neq 0$ pour $k = 0, \ldots, n-2$. En cours,

vous avez alors montré que la famille de vecteurs non nuls $\{x_0, u(x_0), \ldots, u^{n-1}(x_0)\}$ était une base de E (dans laquelle la matrice de u est le bloc de Jordan de taille n associé à la valeur propre 0). Donc, par la question 2), $\mathcal{C}(u) = \mathbb{R}[u]$.

4) a) Soit $x \in E_i$. On a : $u(v(x)) = v(u(x)) = v(\lambda_i x) = \lambda_i v(x)$. D'où $v(x) \in E_i$, donc E_i est stable par v.

b) Soit $x \in E_i$. On a :

$$\begin{aligned} v_i(u_i(x)) &= v_i(u(x)) \text{ puisque } x \in E_i, \\ &= v(u(x)) \text{ puisque } E_i \text{ est stable par } u, \\ &= u(v(x)) \text{ car } v \in \mathcal{C}(u), \\ &= u(v_i(x)), \text{ car } v_i(x) \in E_i \text{ puisque } v(E_i) \subset E_i, \\ &= u_i(v_i(x)). \end{aligned}$$

Donc $v_i \circ u_i = u_i \circ v_i$, ie $v_i \in \mathcal{C}(u_i)$.

c) L'application Φ est bien définie : si $v \in \mathcal{C}(u)$, alors chaque v_i existe (question 4)a)) et chaque v_i appartient bien à $\mathcal{C}(u_i)$ (question 4)b)). L'application est également linéaire : en effet, pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $v, w \in \mathcal{C}(u)$ on a : $(\alpha v + \beta w)_{|E_i} = \alpha(v_{|E_i}) + \beta(w_{|E_i})$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha v + \beta w) &= (\alpha(v_{|E_1}) + \beta(w_{|E_1}), \ldots, \alpha(v_{|E_p}) + \beta(w_{|E_p})), \\ &= \alpha(v_{|E_1}, \ldots, v_{|E_p}) + \beta(w_{|E_1}, \ldots, w_{|E_p}), \\ &= \alpha\Phi(v) + \beta\Phi(w). \end{aligned}$$

Définissons l'application

$$\begin{array}{c} \Psi : \mathcal{C}(u_1) \times \cdots \times \mathcal{C}(u_p) \to \mathcal{C}(u) \\ (v_1, \ldots, v_p) \mapsto \sum_{i=1}^p \widetilde{v_i} \end{array}$$

où $\widetilde{v_i} \in \mathcal{L}(E)$ est définie par $\widetilde{v_i}(x) = v_i(x)$ si $x \in E_i$, $\widetilde{v_i} = 0$ sinon ($\widetilde{v_i}$ est l'extension de v_i à $\mathcal{L}(E)$). Par hypothèse on a $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$. Cela permet de vérifier successivement que Ψ est bien définie, que c'est une application linéaire, puis que $\Phi \circ \Psi = Id_{\mathcal{C}(u_1)\times\cdots\times\mathcal{C}(u_p)}$ et $\Psi \circ \Phi = Id_{\mathcal{C}(u)}$. Donc Φ est bijective, d'application réciproque Ψ.

d) E_i étant le sous-espace propre de u associé à λ_i, si $x \in E_i$, $u_i(x) = u(x) = \lambda_i x$. Donc on sait que u_i est l'homothétie de rapport λ_i : $u_i = \lambda_i id_E$. Donc u_i commute avec n'importe quel endomorphisme de E_i, ie $\mathcal{C}(u_i) = \mathcal{L}(E_i)$. Donc

$$\dim(\mathcal{C}(u_i)) = \dim(\mathcal{L}(E_i)) = (\dim E_i)^2 = n_i^2 \,.$$

Ensuite, $\mathcal{C}(u)$ et $\mathcal{C}(u_1) \times \cdots \times \mathcal{C}(u_p)$ sont isomorphes d'après la question c), donc ils ont même dimension :

$$\dim(\mathcal{C}(u)) = \dim(\mathcal{C}(u_1) \times \cdots \times \mathcal{C}(u_p)) = \sum_{i=1}^p \dim(\mathcal{C}(u_i)) = \sum_{i=1}^p n_i^2 \,.$$

5) a) Comme u est diagonalisable, son polynôme minimal est scindé à racines simples. Comme de plus u a p valeurs propres λ_i distinctes, son minimal vaut donc

$$M_u(X) = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_p) \,.$$

b) Soient $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ tels que

$$\sum_{k=0}^{p-1} a_k u^k = 0. \tag{2}$$

Montrons que les a_k sont nuls. Par l'absurde, si l'un de ses coefficients a_k n'est pas nul alors ce polynôme est de degré inférieur ou égal à $p-1$. Or, l'égalité (2) signifie que le polynôme $\sum_{k=0}^{p-1} a_k X^k$ est annulateur de u. Donc il est divisible par M_u. Ce dernier étant de degré p, ce n'est pas possible. Donc tous les coefficients a_k sont nuls, ce qui prouve que la famille $\{Id, u, \ldots, u^{p-1}\}$ est libre.

c) Soit $k \geqslant p$. La division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$ de X^k par $M_u(X)$ donne $X^k = M_u(X)Q(X)+R(X)$ avec $R(X)$ un polynôme de degré strictement inférieur à $\deg(M_u) = p$. Donc $u^k = M_u(u) \circ Q(u) + R(u) = R(u)$ car $M_u(u) = 0$. Donc u^k est un polynôme en u de degré au plus $p-1$, ie $u^k \in \mathrm{Vect}(Id, u, \ldots, u^{p-1})$.
Soit $P(u) \in \mathbb{R}[u]$. D'après ce qui précède, chaque monôme u^k pour $k \geqslant p$ figurant dans $P(u)$ peut être remplacé par un élément de $\mathrm{Vect}(Id, u, \ldots, u^{p-1})$. On en déduit que $\{Id, u, \ldots, u^{p-1}\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}[u]$. Comme elle est libre d'après la question a), on en déduit que c'est une base de $\mathbb{R}[u]$.

6) D'après la question 5) on a donc $\dim(\mathbb{R}[u]) = p$ et d'après la question 4) on a $\dim(\mathcal{C}(u)) = \sum_{i=1}^{p} n_i^2$. Comme on a toujours $\mathbb{R}[u] \subset \mathcal{C}(u)$, on a donc :

$$\mathbb{R}[u] = \mathcal{C}(u) \Longleftrightarrow \dim(\mathbb{R}[u]) = \dim(\mathcal{C}(u)) \Longleftrightarrow p = \sum_{i=1}^{p} n_i^2 \,.$$

Cette dernière égalité équivaut à $n_i = 1$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$ (car chaque n_i est un entier naturel non nul), c'est-à-dire encore à chaque sous-espace propre de dimension 1. Comme u est diagonalisable, ceci est finalement équivalent à dire que u admet $\dim(E) = n$ valeurs propres distinctes, donc à $p = n$.

Remarque : on retrouve ainsi le résultat de la question 3)a). La question 3)b) montre toutefois qu'on peut avoir $\mathbb{R}[u] = \mathcal{C}(u)$ sans que u soit diagonalisable.