# Théorèmes limite en probabilités et statistique Applications [1]

## Table des matières



1. Enseignant : G. Chagny, bureau M.2.35. gaelle.chagny@univ-rouen.fr.

# Introduction

Ce cours-TD contient un ensemble de rappels (définitions, et énoncés de résultats). Les références principales pour les démonstrations sont [Ouv04], [BL12] (cours et exercices) et [CGCDM11] (exercices), ainsi que [QZ07] (pour la Section 2.3 principalement). Certaines applications, ou plus rarement certains énoncés ne figurent pas dans ces ouvrages : d'autres références sont alors citées, mais elles peuvent sans doute être omises en début d'année !

Voici les principaux objectifs de ce document :

- proposer des rappels (non exhaustifs) sur quelques notions de M1 avant de commencer la préparation à l'épreuve de modélisation avec le logiciel Scilab pour illustrer les principaux résultats présentés ici, et surtout donner des références pour ces notions (livres autorisés de l'agrégation),
- proposer quelques exercices pour "réviser" (plus) activement,
- fournir des résultats et surtout des applications qui pourront (éventuellement) être utilisés lors de la préparation de certaines leçons d'Analyse et Probabilités (leçons de probabilités, mais aussi d'intégration, ou même leçons sur les séries).

Dans tout le document, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ désignera un espace probabilisé. Lorsque l'on précisera qu'une propriété est vraie "presque sûrement" (ou une quantité est définie presque sûrement) sans précision de la mesure, cela signifiera $\mathbb{P}-$presque sûrement (*ie.* relativement à la mesure de probabilité $\mathbb{P}$). Lorsque l'on parle d'événements ou de variables aléatoires indépendantes, il s'agit d'indépendance mutuelle. On précisera sinon "indépendance deux à deux". Les notations seront introduites au fur et à mesure.

# 1 Lemme de Borel-Cantelli et loi du 0-1

Ces résultats ne sont pas à proprement parler des théorèmes limite, mais ils donnent des informations sur le comportement asymptotique des variables aléatoires.

## 1.1 Lemme de Borel-Cantelli

### 1.1.1 Limites inférieure et supérieure d'une suite d'ensembles

On peut se reporter à [BP00, p.58] ou [Dur10, p.47].

**Définition 1** *Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite (dénombrable) de sous-ensembles de $\Omega$. On définit la **limite supérieure** et la **limite inférieure** des $A_n$ par :*

$$\begin{aligned}\overline{\lim_n} A_n := \bigcap_{n\geq 0}\bigcup_{k\geq n} A_k &= \{x\in\Omega \setminus \forall n\in\mathbb{N},\ \exists k\geq n,\ x\in A_k\}, \\ &= \{x\in\Omega, x\in A_k \textit{ infiniment souvent}\}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{\lim_n} A_n := \bigcup_{n\geq 0}\bigcap_{k\geq n} A_k &= \{x\in\Omega \setminus \exists n\in\mathbb{N},\ \forall k\geq n,\ x\in A_k\}, \\ &= \{x\in\Omega, x\in A_k \textit{ à partir d'un certain rang}\}.\end{aligned}$$

**Remarques.**

1. On a les propriétés suivantes :
   - $\underline{\lim}_n A_n \subset \overline{\lim}_n A_n$,
   - si la suite $(A_n)_n$ est croissante pour l'inclusion, $\underline{\lim}_n A_n = \overline{\lim}_n A_n = \bigcup_{n\geq 0} A_n$ ; si elle est décroissante, $\underline{\lim}_n A_n = \overline{\lim}_n A_n = \bigcap_{n\geq 0} A_n$,
   - $(\overline{\lim}_n A_n)^c = \underline{\lim}_n A_n^c$ et $(\underline{\lim}_n A_n)^c = \overline{\lim}_n A_n^c$.
2. Le lien avec les notions de limites inférieures et supérieures de suites numériques (ou suite de fonctions) se fait de la manière suivante :
$$\underline{\lim_n}\, \mathbf{1}_{A_n} = \mathbf{1}_{\underline{\lim}_n A_n} \text{ et } \overline{\lim_n}\, \mathbf{1}_{A_n} = \mathbf{1}_{\overline{\lim}_n A_n}$$
(voir [QZ07, p.2-3] pour des rappels sur les limites inférieures et supérieures de suites).
3. Si $(A_n)_n$ est une suite d'éléments de $\mathcal{F}$, alors $\overline{\lim}_n A_n \in \mathcal{F}$ et $\underline{\lim}_n A_n \in \mathcal{F}$. De plus,
$$\mathbb{P}\left(\underline{\lim_n} A_n\right) \leq \underline{\lim_n}\, \mathbb{P}(A_n) \leq \overline{\lim_n}\, \mathbb{P}(A_n) \leq \mathbb{P}\left(\overline{\lim_n} A_n\right).$$

### 1.1.2 Lemme et applications

**Lemme 2** *(Lemme de Borel Cantelli) [BL12, p.93] [Ouv04, p.51] Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{F}$.*

1. *Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) < \infty$, alors $\mathbb{P}(\overline{\lim}_n A_n) = 0$.*
2. *On suppose de plus les événements $A_n$ indépendants. Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = \infty$, alors $\mathbb{P}(\overline{\lim}_n A_n) = 1$*

**Attention !** Le second point du lemme est valable uniquement sous l'hypothèse d'indépendance des événements. *Contre-Exemple* ([Ouv04, p.53]) : $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = ([0;1], \mathcal{B}_{[0;1]}, \lambda))$ (intervalle $[0;1]$ muni de sa tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue restreinte à $[0;1]$), et pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $A_n = ]0;1/n]$. Alors $\overline{\lim}_n A_n = \emptyset$, mais $\sum_n \mathbb{P}(A_n) = \infty$.

**Applications.**

- Critère de convergence presque sûre des suites de variables aléatoires, voir Section 2.1.1.
- ***Exercice 1.*** **Retours à zéro de la marche aléatoire** [CGCDM11, p.151]. On considère une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires *i.i.d.* de Rademacher de paramètre $p \in ]0;1[$, $p \neq 1/2$ (c'est-à-dire que chaque $X_n$ prend les valeurs 1 et -1 avec probabilités respectives $p$ et $1-p$). On définit la marche aléatoire $(S_n)_{n\geq 0}$ correspondante par $S_0 = 0$, et pour $n \geq 1$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Montrer que $\mathbb{P}(\overline{\lim}_n\{S_n = 0\}) = 0$. Interpréter.
- ***Exercice 2.*** [Dur10, Thm (6.7), p. 50] On considère $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires *i.i.d.* telles que $\mathbb{E}[|X_1|] = \infty$, et $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ $(n \geq 1)$.
  1. (Question préliminaire) Soit $Y$ une variable aléatoire. Justifier que
  $$\mathbb{E}[|Y|] = \int_0^\infty \mathbb{P}(|Y| > x)dx.$$
  2. Montrer que $\mathbb{P}(\overline{\lim}_n\{|X_n| \geq n\}) = 1$.
  3. Soit $C = \{\lim_n S_n/n \text{ existe et est finie}\}$.
     (a) En raisonnant par l'absurde, montrer que
     $$C \cap \overline{\lim_n}\{|X_n| \geq n\} = \emptyset.$$
     *Indication :* on pourra calculer $S_n/n - S_{n+1}/(n+1)$...
     (b) En déduire $\mathbb{P}(C) = 0$.

  Ceci prouve en particulier que l'hypothèse d'intégrabilité est nécessaire à la loi forte des grands nombres (voir Section 3).
- ***Exercice 3.*** [BL12, p. 94] On lance une infinité de fois une pièce équilibrée. Montrer qu'avec probabilité 1, on obtient une infinité de fois 2 piles consécutifs. Des arguments similaires permettent de montrer que si un singe "dactylographe" tape au hasard sur un clavier, alors toute phrase, quelle que soit sa longueur, apparait une infinité de fois avec probabilité 1 au cours de la frappe (voir [FF67, p.232]).

## 1.2 Loi du 0-1

### 1.2.1 Tribu des événements terminaux

On retrouvera les définitions et exemples dans [Ouv04, p.48] ou [BL12, p.92].

**Définition 3** *Soit $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de sous-tribus de $\mathcal{F}$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{G}_n = \sigma(\mathcal{F}_p,\ p \geq n) = \sigma\left(\bigcup_{p\geq n} \mathcal{F}_p\right)$. On appelle **tribu terminale** ou **tribu asymptotique** ou **tribu de queue** la tribu*

$$\mathcal{G}_\infty = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{G}_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \sigma\left(\bigcup_{p\geq n} \mathcal{F}_p\right).$$

*Les événements de $\mathcal{G}_\infty$ sont appelés **événements terminaux** ou **asymptotiques**.*

**Exemples.**

1. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \mathcal{F}_n$. Alors $\overline{\lim}_n A_n \in \mathcal{G}_\infty$.
2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On prend $\mathcal{F}_n = \sigma(X_n)$ ($\mathcal{F}_n$ la tribu engendrée par la variable $X_n$). Avec les notations de la définition, $\mathcal{G}_n = \sigma(X_p, p \geq n)$ (tribu des événements qui se laissent décrire uniquement avec ce qui se passe à partir du rang $n$, événements dont la réalisation ne dépend, à $\omega \in \Omega$ fixé, que de la suite $(X_n(\omega), X_{n+1}(\omega), \ldots)$). La tribu terminale est alors $\mathcal{G}_\infty = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \sigma(X_p, p \geq n)$ : un événement appartient à la tribu, si, pour un $\omega \in \Omega$ fixé, tout en dépendant de la suite $(X_0(\omega), X_1(\omega), \ldots)$, il ne dépend pas des $n$ premières valeurs, et ce, quel que soit l'entier $n$. Ainsi, on a $\{$la suite $(X_n)_n$ converge dans $\mathbb{R}\} \in \mathcal{G}_\infty$ (intuitivement, la convergence d'une suite ne dépend pas de ses premiers termes).

### 1.2.2 Loi et applications

Pour une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements indépendants, le lemme de Borel-Cantelli affirme que la probabilité de l'événement $\overline{\lim}_n A_n$ ne peut prendre que deux valeurs, 0 ou 1, selon que la série de terme général $\mathbb{P}(A_n)$ est convergente ou divergente. C'est un premier exemple du résultat ci-dessous.

**Théorème 4** *(Loi du 0-1 de Kolmogorov) [Ouv04, p.50] Soit $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite indépendante de sous-tribus de $\mathcal{F}$, et $\mathcal{G}_\infty$ la tribu terminale associée. On a alors,*

$$\forall A \in \mathcal{G}_\infty,\ \mathbb{P}(A) = 0 \text{ ou } \mathbb{P}(A) = 1.$$

**Applications/Exercice.** Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

- La série $\sum_n X_n$ converge ou diverge presque sûrement, puisque l'événement $\{\sum_n X_n$ converge$\}$ est asymptotique.
- ***Exercice 4.*** [FF67, p.233] Soit $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. On suppose que la suite $(S_n/n)_n$ converge presque sûrement vers une limite $S$, alors cette limite est presque sûrement constante (voir Section 2.1.1 pour les rappels sur la convergence presque sûre).

# 2 Modes de convergence des suites de variables aléatoires

**Rappel :** On dit qu'une variable aléatoire réelle $X$ définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est dans $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $p \geq 1$ (ou, s'il n'y a pas d'ambiguité, on dit juste $X \in L^p$), si $\mathbb{E}[|X|^p] < \infty$. L'espace $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est muni de la norme $\|X\|_p = (\mathbb{E}[|X|^p])^{1/p}$, qui en fait un espace complet (Théorème de Riesz-Fisher). On pourra se reporter à [BP00] pour un cours complet sur les espaces $L^p$.

## 2.1 Convergence des suites de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé

Dans ce paragraphe, toutes les variables aléatoires sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. La référence principale est [Ouv04, p.89 et suivantes].

**Remarque.** Pour simplifier la présentation et les notations, on considère dans cette section des variables aléatoires réelles. Toutes les définitions et résultats s'adaptent aux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$. Il suffira de remplacer les valeurs absolues par une norme (peu importe le choix de celle-ci : elles sont toutes équivalentes).

### 2.1.1 Définitions et premières propriétés

**Définition 5** *Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires et $X$ une autre variable aléatoire.*

1. *On dit que la suite $(X_n)_n$ converge presque sûrement vers $X$ s'il existe un événement $C$ de probabilité 1, tel que, sur $C$, la suite $(X_n)_n$ converge simplement vers $X$ (en tant que suite de fonctions) :*
$$\exists C \in \mathcal{F},\ \mathbb{P}(C) = 1,\ \forall \omega \in C,\ \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega).$$
*On note $X_n \xrightarrow{p.s.} X$.*
2. *On dit que la suite $(X_n)_n$ converge en probabilité vers $X$ si,*
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0.$$
*On note $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.*
3. *On suppose que $X, X_n \in L^p$, $n \in \mathbb{N}$ (pour un certain $p \geq 1$). On dit que $X_n$ converge vers $X$ dans $L^p$, s'il y a convergence au sens de la norme $L^p$ (définie ci-dessus), c'est-à-dire si*
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[|X_n - X|^p\right] = 0.$$
*On note $X_n \xrightarrow{L^p} X$.*

**Remarques.**

1. Il y a unicité p.s. des limites d'une suite de variables convergeant p.s, dans $L^p$ (c'est immédiat) ou en probabilité (à démontrer !).
2. Une suite $(X_n)_n$ converge dans $L^p$ si et seulement si elle est de Cauchy dans $L^p$ (complétude des espaces $L^p$).

**Propriétés.**

1. Si la suite $(X_n)_n$ converge presque sûrement (resp. en probabilité) vers $X$, et si $f$ est une fonction continue sur $\Omega$, alors la suite $(f(X_n))_n$ converge presque sûrement (resp. en probabilité) vers $f(X)$.
2. (critère de cv. en proba.) La suite $(X_n)_n$ converge en probabilité vers $X$ si et seulement si,
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \geq 0,\ \forall n \geq N,\ \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) < \varepsilon$$
(à comparer avec la définition ci-dessus !).
3. (critère de cv. ps.) La suite $(X_n)_n$ converge presque sûrement vers $X$ si et seulement si l'une des deux conditions équivalentes suivantes est vérifiée :
   (i) $\forall \varepsilon > 0$, $\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\left(\sup_{n\geq N} |X_n - X| > \varepsilon\right) = 0$.
   (ii) $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbb{P}\left(\overline{\lim}_n \{|X_n - X| > \varepsilon\}\right) = 0$.
4. (critère de cv. ps.) Si pour tout $\varepsilon > 0$, $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}\left(|X_n - X| > \varepsilon\right) < \infty$, alors $(X_n)_n$ converge presque sûrement vers $X$.
5. (critère de cv. ps.) Si il existe $(\varepsilon_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle positive telle que
$$\sum_{n\geq 0} \varepsilon_n < \infty \text{ et } \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}\left(|X_{n+1} - X_n| > \varepsilon_n\right) < \infty$$
alors la suite $(X_n)_n$ converge presque sûrement.

### 2.1.2 Liens entre les modes de convergence

***Liens entre la convergence presque-sûre et la convergence en probabilité***

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

**Proposition 6** *Si la suite $(X_n)_n$ converge presque sûrement vers une variable aléatoire $X$, alors $(X_n)_n$ converge aussi en probabilité vers $X$.*

**Proposition 7**
1. *Si la suite $(X_n)_n$ converge en probabilité vers une variable aléatoire $X$, alors il existe une sous-suite $(X_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$ qui converge presque sûrement vers $X$.*
2. *La suite $(X_n)_n$ converge en probabilité vers une variable aléatoire $X$ si et seulement si, de toute suite extraite de $(X_n)_n$, on peut extraire une sous-suite qui converge presque sûrement vers $X$.*

**Conséquence.** La suite $(X_n)_n$ converge en probabilité si et seulement si elle est de Cauchy pour la convergence en probabilité, c'est-à-dire, si, pour tout $\varepsilon > 0$, la suite (double) $(\mathbb{P}(|X_n - X_m| > \varepsilon))_{n,m>0}$ converge vers 0.

**Attention !** La convergence en probabilité n'implique pas la convergence presque sûre. *Contre-Exemple* ([CGCDM11, p.154] ou [Ouv04, p.93]) : considérer $(X_n)_n$ suite de variables aléatoires indépendantes telle que la loi de $X_n$ est $\mathcal{B}(1/n)$, $n \geq 1$ (loi de Bernoulli de paramètre $1/n$). Alors $(X_n)_n$ converge en probabilité vers 0 mais pas presque sûrement.

**Remarque -** ***Exercice 5.*** **Métrisabilité de la convergence en probabilité.** [Ouv04, Ex. 10.1 p.121] Pour deux variables aléatoires réelles $X$ et $Y$ définies presque sûrement, on pose

$$d(X,Y) = \mathbb{E}\left[\frac{|X-Y|}{1+|X-Y|}\right] \quad \text{et} \quad \delta(X,Y) = \mathbb{E}\left[\min(1, |X-Y|)\right].$$

1. Démontrer que $d$ et $\delta$ définissent deux distances sur l'espace $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ des variables aléatoires définies presque sûrement.
2. Montrer que $d$ et $\delta$ sont équivalentes.
3. Montrer que la convergence des suites au sens de ces distances est équivalente à la convergence en probabilité. *Indication :* on pourra justifier que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\mathbb{P}(|X-Y| > \varepsilon) \leq d(X,Y) \leq \varepsilon + \mathbb{P}(|X-Y| > \varepsilon).$$

***Liens avec la convergence $L^p$ : uniforme intégrabilité et équicontinuité***

**Première remarque.** Si $q \geq p \geq 1$, on a l'inclusion $L^q(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \subset L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ (attention, ceci est vrai uniquement car la mesure $\mathbb{P}$ considérée est une mesure *finie*). La convergence d'une suite de variables aléatoires dans $L^q(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ entraîne sa convergence dans $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Pour faire le lien entre convergence en probabilité et convergence dans $L^p$, on introduit la notion d'uniforme intégrabilité.

**Définition 8** *Soit $\mathcal{M}$ une partie de $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ (une famille de variables aléatoires intégrables). On dit que $\mathcal{M}$ est uniformément intégrable si*

$$\lim_{\alpha\to\infty} \sup_{X\in\mathcal{M}} \int_{\{|X|\geq\alpha\}} |X| d\mathbb{P} = 0,$$

*ce qui signifie*

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\alpha_0 > 0,\ \forall\alpha > \alpha_0,\ \forall X \in \mathcal{M},\ \int_{\{|X|\geq\alpha\}} |X| d\mathbb{P} \leq \varepsilon.$$

**Proposition 9** *Soit $\mathcal{M} \subset L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. La partie $\mathcal{M}$ est uniformément intégrable si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées*

1. *$\mathcal{M}$ est bornée dans $L^1$, c'est-à-dire $\sup_{X\in\mathcal{M}} \mathbb{E}[|X|] < \infty$.*
2. *$\mathcal{M}$ est équicontinue, c'est-à-dire*

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ \left\{\begin{array}{l} A \in \mathcal{F} \\ \mathbb{P}(A) \leq \delta \end{array}\right. \Longrightarrow \sup_{X\in\mathcal{M}} \int_A |X| d\mathbb{P} \leq \varepsilon.$$

**Exemples.**

- Si $\mathcal{M} = \{X\}$ avec $X \in L^1$, alors $\mathcal{M}$ est uniformément intégrable, et plus généralement, toute famille finie de variables aléatoires intégrables est uniformément intégrable.
- Si $\mathcal{M}$ est une partie bornée dans $L^p$, pour $1 < p \leq \infty$, alors $\mathcal{M}$ est uniformément intégrable.

**Attention !** Toute partie bornée de $L^1$ n'est pas uniformément intégrable. *Contre-Exemple* : $(A_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{F}$, tel que $\mathbb{P}(A_n) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$. Soit $X_n = \mathbf{1}_{A_n}/\mathbb{P}(A_n)$. Considérer $\mathcal{M} = \{X_n, n \geq 1\}$.

**Proposition 10** *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables dans $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Soit $X$ une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*

*(i) $X \in L^1$ et $(X_n)_n$ converge vers $X$ dans $L^1$.*

*(ii) La famille $(X_n)_n$ est uniformément intégrable, et $(X_n)_n$ converge vers $X$ en probabilité.*

En particulier, la convergence d'une suite de variables aléatoires dans $L^1$ (et donc dans $L^p$, $p \geq 1$) entraîne sa convergence en probabilité.

**Attention !** La convergence en probabilité n'implique pas la convergence dans $L^1$. *Contre-Exemple* ([CGCDM11, p.154] ou [Ouv04, p.101]) : $(X_n)_n$ suite de variables aléatoires telle que $\mathbb{P}(X_n = n) = 1/n$, $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - 1/n$, $n \geq 1$. Alors $(X_n)_n$ converge en probabilité vers 0 mais pas dans $L^1$. En particulier, la convergence presque sûre n'entraine pas non plus la convergence $L^1$.

Pour un lien direct entre convergence $L^p$ et convergence presque-sûre, on a le résultat suivant.

**Proposition 11** *[BP00, p.161] Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $L^p(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ et $X \in L^p(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$. Si $(X_n)_n$ converge vers $X$ dans $L^p$, alors il existe une sous-suite $(X_{n_p})_p$ qui converge presque sûrement vers $X$.*

## 2.2 Convergence en loi des suites de variables aléatoires

**Notations.** On introduit $\mathcal{M}_1$ l'ensemble des mesures de probabilités sur $(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d})$, $d\geq 1$ ($\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$) la tribu borélienne), ainsi que les espaces vectoriels de fonctions suivants :

- $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$, l'ensemble des fonctions continues à support compact sur $\mathbb{R}^d$,
- $\mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^d)$, l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}^d$, tendant vers 0 à l'infini,
- $\mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}^d)$, l'ensemble des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}^d$.

Pour $X$ une variable aléatoire de $\mathbb{R}^d$, on note également

- $\varphi_X$ sa fonction caractéristique :

$$\varphi_X\ :\ t\in\mathbb{R}^d\ \mapsto\ \varphi_X(t)=\mathbb{E}\left[\exp(i\langle t,X\rangle)\right],$$

  où $\langle t,X\rangle$ est le produit scalaire euclidien usuel de $\mathbb{R}^d$ ($\varphi_X(t)=\mathbb{E}[\exp(itX)]$ si $d=1$).
- $F_X$ sa fonction de répartition, dans le cas où $d=1$ :

$$F_X\ :\ x\in\mathbb{R}\ \mapsto\ F_X(x)=\mathbb{P}(X\leq x).$$

### 2.2.1 Convergence des suites de mesures de probabilité

On pourra lire [Ouv04, p.297 et suivantes].

**Définition 12** *Soient $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{M}_1$, et $\mu\in\mathcal{M}_1$. On dit que*

$$\textit{la suite } (\mu_n)_n \textit{ converge } \left|\begin{array}{l}\textit{vaguement}\\ \textit{faiblement}\\ \textit{étroitement}\end{array}\right. \textit{ vers } \mu, \textit{ si } \forall\varphi\in \left|\begin{array}{l}\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d)\\ \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^d)\\ \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}^d)\end{array}\right. \quad \lim_{n\to\infty}\int\varphi d\mu_n=\int\varphi d\mu.$$

**Remarques.**

- Comme $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d)\subset\mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^d)\subset\mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}^d)$, il est immédiat que la convergence étroite d'une suite entraîne sa convergence faible, qui elle-même entraîne sa convergence vague.
- On peut en fait définir plus généralement ces modes de convergence pour les mesures bornées. La spécificité des mesures de probabilité ici réside dans le Théorème 16 ci-dessous.

**Proposition 13** *(Théorème porte-manteau) Soient $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{M}_1$, et $\mu\in\mathcal{M}_1$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

*(i) La suite $(\mu_n)_n$ converge étroitement vers $\mu$.*

*(ii) Pour tout ensemble $F\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ fermé , $\overline{\lim}\,\mu_n(F)\leq\mu(F)$.*

*(iii) Pour tout ensemble $O\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ ouvert, $\underline{\lim}\,\mu_n(O)\geq\mu(O)$.*

*(iv) Pour tout ensemble $B\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ tel que $\mu(\partial B)=0$, $\lim_{n\to\infty}\mu_n(B)=\mu(B)$.*

**Attention !** L'item (iv) est valide uniquement pour les boréliens $A$ dont la mesure de la frontière est nulle. Voir *Contre-Exemple* en Section 2.2.2, ou encore [Ouv04, 307-308].

**Définition 14** *Soit $\mathcal{M}$ un sous-ensemble de $\mathcal{M}_1$. On dit que $\mathcal{M}$ est tendu si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $K$ compact de $\mathbb{R}^d$ tel que $\sup_{\mu\in\mathcal{M}} \mu(K^c) \leq \varepsilon$.*

**Exemples.**

- Si $\mathcal{M} = \{\mu\}$, alors $\mathcal{M}$ est tendu. Plus généralement, tout ensemble fini de mesures de probabilités est tendu.
- Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$. Alors $\mathcal{M} = \{\delta_{a_n}, n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas tendu.

**Proposition 15** *Soient $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{M}_1$, et $\mu \in \mathcal{M}_1$. Si $(\mu_n)_n$ converge étroitement vers $\mu$, alors $\{\mu_n, n \in \mathbb{N}\}$ est tendu.*

**Théorème 16** *Soient $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{M}_1$, et $\mu \in \mathcal{M}_1$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

- *La suite $(\mu_n)_n$ converge vers $\mu$ vaguement.*
- *La suite $(\mu_n)_n$ converge vers $\mu$ faiblement.*
- *La suite $(\mu_n)_n$ converge vers $\mu$ étroitement.*

### 2.2.2 Définitions et premières propriétés de la convergence en loi

Les modes de convergence définis en Section 2.1 concernent des suites de variables qui sont définies sur un même espace de probabilité. La convergence en loi définie ci-dessous ne porte que sur les lois des variables aléatoires et peut donc concerner des variables définies sur des espaces différents. On se reportera à [Ouv04, p.312 et suivantes].

**Définition 17** *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ (non nécessairement définies sur le même espace probabilisé). Soit également $X$ une autre variable aléatoire de $\mathbb{R}^d$. On dit que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers $X$ si la suite $(\mathbb{P}_{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ des lois des $X_n$ converge étroitement vers $\mathbb{P}_X$, la loi de $X$. On note $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$. On pourra également dire que $(X_n)_n$ converge vers $\mathbb{P}_X$, et écrire $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathbb{P}_X$.*

**Remarques.**

- Par Théorème de transfert, et par définition de la convergence étroite, la suite $(X_n)_n$ converge en loi vers $X$ si et seulement si

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d) \text{ ou } (\mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^d) \text{ ou } \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}^d), \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\varphi(X_n)\right] = \mathbb{E}\left[\varphi(X)\right].$$

- Si la suite $(X_n)_n$ converge en loi vers $X$ et si $f$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}^d$ (à valeurs dans $\mathbb{R}^{d'}$, pour $d' \geq 1$), alors $(f(X_n))_n$ converge en loi vers $f(X)$ (on peut en fait raffiner, et étendre ce résultat à toute fonction $f$ mesurable continue $\mathbb{P}_X$-presque partout).

**Attention !** Comme précisé dans la mise en garde qui suit la Proposition 13, la convergence en loi d'une suite $(X_n)_n$ vers une variable $X$ ne signifie pas que pour tout $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \in B) = \mathbb{P}(X \in B)$. Cette propriété est valable seulement si $\mathbb{P}_X(\partial B) = 0$. *Contre-Exemple* : considérer $(X_n)_n$ suite déterministe, $X_n = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec $(a_n)_n$ suite réelle convergeant vers $a \in \mathbb{R}$ et telle que $a_n > a$ pour tout $n$, et prendre $B = ]-\infty; a]$.

### 2.2.3 Caractérisations de la convergence en loi

La loi d'une variable aléatoire $X$ est caractérisée par les espérances $\mathbb{E}[\varphi(X)]$, pour toute fonction $\varphi$ de $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$ (ou toute fonction borélienne bornée, ou toute fonction borélienne positive...). Elle est aussi caractérisée, dans le cas où $X$ est réelle, par sa fonction de répartition $F_X$, ou par sa fonction caractéristique $\varphi_X$. On s'intéresse donc d'abord à caractériser la convergence en loi à travers ces deux “outils”.

***Convergence en loi et fonction de répartition***

**Proposition 18** *[Ouv04, p.318] Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles, et $X$ une variable aléatoire réelle. La suite $(X_n)_n$ converge en loi vers $X$ si et seulement si la suite (numérique) $(F_{X_n}(x))_n$ converge vers $F_X(x)$ en tout point $x$ de continuité de $F_X$.*

**Attention !** Si $(X_n)_n$ converge en loi vers $X$, on n'a pas nécessairement convergence de $(F_{X_n}(x))_n$ vers $F_X(x)$ si $x$ n'est pas un point de continuité de $F$. *Contre-Exemple* ([Ouv04, p.319]) : prendre $(X_n)_{n\geq 1}$ déterministe, $X_n = 1/n$, et $X = 0$. Considérer les fonctions de répartition au point 0.

**Applications - Exercice**

- [CGCDM11, Ex 4.6, p.111] Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires réelles, convergeant en loi vers une variable $X$ de fonction de répartition $F$ continue. Soient $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ deux suites réelles, de limites respectives $a$ et $b$ ($a \leq b$). Alors
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(a_n \leq X_n \leq b_n\right) = \mathbb{P}(a \leq X \leq b).$$
- ***Exercice 6.*** [BL12, p.130] et [CGCDM11, Ex 4.23, p.140] Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles *i.i.d.*, et $M_n = \max_{i\in\{1,\dots,n\}} X_i$, $n \geq 1$. On s'intéresse à la convergence en loi des maximums $(M_n)_n$ correctement renormalisés dans des cas particuliers.
  1. On suppose que $X_1$ suit la loi exponentielle de paramètre $\alpha > 0$. Soit $Z_n = \alpha M_n - \ln(n)$, $n \geq 1$. Montrer que $(Z_n)_n$ converge en loi vers une variable $Z$ de répartition $F_Z : x \mapsto \exp(-\exp(-x))$ (loi de Gumbel).
  2. On suppose que $X_1$ suit la loi de Cauchy de paramètre $c > 0$ (densité $x \mapsto c/(\pi(c^2 + x^2))$. Soit $Z_n = \pi M_n/(nc)$, $n \geq 1$. Montrer que $(Z_n)_n$ converge en loi vers une variable $Z$ de répartition $F_Z : x \mapsto \exp(-x^{-1})\mathbf{1}_{x>0}$ (loi de Fréchet).
  3. On suppose que $X_1$ suit la loi de répartition $F_{X_1}(x) = 1-(1-x)^\alpha \mathbf{1}_{[0;1[}(x) + \mathbf{1}_{x\geq 1}$. Soit $Z_n = n^{1/\alpha}(M_n - 1)$, $n \geq 1$. Montrer que $(Z_n)_n$ converge en loi vers une variable $Z$ de répartition $F_Z : x \mapsto \exp(-(-x)^\alpha)\mathbf{1}_{x<0} + \mathbf{1}_{x\geq 0}$ (loi de Weibull).

***Convergence en loi et fonction caractéristique***

**Théorème 19** *(Théorème de Lévy, version faible) [BL12, p.122] ou [QZ07, p.536] Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires de $\mathbb{R}^d$, et $X$ une variable aléatoire de $\mathbb{R}^d$. La suite $(X_n)_n$ converge en loi vers $X$ si et seulement si la suite de fonctions caractéristiques $(\varphi_{X_n})_n$ converge simplement vers la fonction caractéristique $\varphi_X$.*

La preuve de ce résultat proposée dans [QZ07, p.536] est fondée sur le résultat suivant d'analyse de Fourier.

**Lemme 20** *[Far06] Considérons $\mathcal{A}(\mathbb{R}) = \{\hat{\varphi}, \varphi \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \lambda)\}$, l'ensemble des transformées de Fourier des fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$ par rapport à la mesure de Lebesgue $\lambda$. Alors $\mathcal{A}(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R})$ pour la norme infini.*

**Remarque (culturelle).** Il existe une version forte du Théorème de Lévy.

- Énoncé. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires de $\mathbb{R}^d$. Si la suite des fonctions caractéristiques $(\varphi_{X_n})_n$ converge simplement vers une fonction $f$ continue en 0, alors $f$ est la fonction caractéristique d'une certaine variable aléatoire $X$ et $(X_n)_n$ converge en loi vers $X$.
- La preuve de ce résultat est (par exemple) fondée sur le Théorème de Prokhorov et son corollaire.
  — Énoncé. Soit $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{M}_1$. L'ensemble $\{\mu_n, n \in \mathbb{N}\}$ est tendu si et seulement si $(\mu_n)_n$ admet une valeur d'adhérence pour la convergence étroite, c'est-à-dire admet une sous-suite qui converge étroitement (on dit alors que $\{\mu_n, n \in \mathbb{N}\}$ est relativement compact pour la convergence étroite).
  — Corollaire. Une suite tendue $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_1$ qui admet une unique valeur d'adhérence pour la convergence étroite converge étroitement vers cette valeur d'adhérence.
  — Le point essentiel pour montrer la version forte du Théorème de Lévy est de prouver que la suite $(\mathbb{P}_{X_n})_n$ est tendue. Il "suffit" de justifier ensuite l'unicité des valeurs d'adhérence pour la convergence étroite.

**Application.** Le Théorème Central limite (Section 4.1) peut être déduit du Théorème de Lévy.

#### 2.2.4 Caractérisations de la convergence en loi dans quelques cas particuliers

***Cas des variables aléatoires discrètes***

**Proposition 21** *Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $X$ des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Alors $(X_n)_n$ converge en loi vers $X$ si et seulement si, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X = k)$.*

**Applications - Exercices**

- ***Exercice 7.*** **Convergence étroite d'une loi binomiale vers une loi de Poisson.** Soit $(p_n)_{n\geq 1}$ une suite numérique réelle, $p_n \in ]0;1[$ pour tout $n$, telle que $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda > 0$. Soit, pour tout $n$, $X_n$ une variable de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_n)$. Montrer que $(X_n)_n$ converge en loi vers une variable de loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ (on peut aussi prouver ce résultat en utilisant le théorème de Lévy, voir [Ouv04, p.321]).
- ***Exercice 8.*** **Convergence étroite d'une loi hypergéométrique vers une loi binomiale.** Soit $X_{N_1,N_2}$ une variable de loi hypergéométrique $\mathcal{H}(n, N_1, N_2)$ ($X_{N_1,N_2}$ compte par exemple le nombre de boules blanches tirées en piochant simultanément $n$ boules dans une urne contenant $N_1$ boules blanches et $N_2$ boules noires). On suppose que $N_1/(N_1 + N_2)$ tend vers $p \in ]0;1[$ quand $N_1$ et $N_2$ tendent vers l'infini. Montrer que $(X_{N_1,N_2})_{N_1,N_2}$ converge en loi vers une variable de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

***Cas des variables aléatoires à densité (par rapport à la mesure de Lebesgue)***

**Proposition 22** *(Lemme de Scheffé) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires de $\mathbb{R}^d$, telle que pour tout $n$, $X_n$ admet une densité $f_{X_n}$ par rapport à la mesure de Lebesgue $\lambda$ sur $\mathbb{R}^d$. Si la suite $(f_{X_n})_n$ converge $\lambda-$presque partout vers une fonction $f$ d'intégrale $1$, alors la suite $(X_n)_n$ converge en loi vers une variable aléatoire de densité $f$. On a même*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{A\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}} \left| \mathbb{P}(X_n \in A) - \int_A f(x)dx \right| = 0.$$

**Attention !** La réciproque du Lemme de Scheffé est fausse. *Contre-Exemple* ([Ouv04, p.319]) : considérer $(X_n)_n$ de densité $f_{X_n} : x \mapsto (1-\cos(2\pi nx))\mathbf{1}_{]0;1]}(x)$. La suite de fonction $(f_{X_n})_n$ ne converge pas presque-partout, mais la suite de variables aléatoire $(X_n)_n$ converge en loi vers une loi uniforme sur $]0;1[$.

***Exemple de la convergence en loi des variables gaussiennes***

***Exercice 9.*** [CGCDM11, Ex. 7.13, p.224] Soit $(X_n)_{n\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires gaussiennes : précisément, $X_n$ suit la loi $\mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2)$. On suppose que $(X_n)_n$ converge en loi vers une variable aléatoire $X$. Montrer que $X$ suit la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, avec $m = \lim_{n\to\infty} m_n$ et $\sigma^2 = \lim_{n\to\infty} \sigma_n^2$.

### 2.2.5 Liens avec les autres modes de convergence

**Proposition 23** *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Soit $X$ une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Si $(X_n)_n$ converge en probabilité vers $X$, alors $(X_n)_n$ converge aussi en loi vers $X$.*

**Attention !** La convergence en loi n'implique pas la convergence en probabilité. *Contre-Exemple* ([CGCDM11, p.154]) : considérer $(X_n)_n$ suite de variables telle que $X_n = -X$ pour $X$ une variable aléatoire de loi symétrique ($X$ et $-X$ ont même loi). Alors $(X_n)_n$ converge en loi vers $X$, mais pas en probabilité.

**Remarque.** La réciproque de la proposition suivante est toutefois vraie dans le cas particulier suivant. Si $(X_n)_n$ converge en loi vers une variable presque sûrement constante $a$, alors $(X_n)_n$ converge aussi en probabilité vers $a$.

### 2.2.6 Convergence en loi d'un vecteur aléatoire et de la suite de ses marginales

Considérons une suite de vecteurs aléatoires de $\mathbb{R}^2$, $(X_n, Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si cette suite converge en loi vers un couple $(X, Y)$, alors les suites de variables aléatoires $(X_n)_n$ et $(Y_n)_n$ convergent en loi respectivement vers $X$ et $Y$ (pourquoi ?). La réciproque est fausse en général. *Contre-Exemple* ([Ouv04, Ex. 14.7 p.346]) : considérer $X$ et $Y$ deux variables indépendantes de loi $\mathcal{B}(1/2)$, et $(X_n)_n$ et $(Y_n)_n$ telles que $X_n = X + 1/n$, $Y_n = 1 - X - 1/n$, $n \geq 1$. Alors, $(X_n)$ converge en loi vers $X$, $(Y_n)_n$ converge en loi vers $Y$, mais $(X_n, Y_n)_n$ ne converge pas en loi vers $(X, Y)$ (sans quoi, $(X_n + Y_n)_n$ convergerait en loi vers $X + Y$, ce qui n'est pas le cas).

On peut cependant énoncer une réciproque dans certains cas particuliers : c'est l'objet des deux prochains résultats. Le premier est le lemme de Slutzky, très utile en statistique.

**Proposition 24** *(Lemme de Slutzky) [Ouv04, Ex. 14.8 p.347] Soient* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites de variables aléatoires réelles sur* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *qui convergent respectivement en loi vers une variable aléatoire* $X$ *et en loi (ou en probabilité) vers une constante* $a$*. Alors,*

1. *la suite* $(X_n, Y_n)_n$ *converge en loi vers* $(X, a)$*,*
2. *en particulier,* $(X_n + Y_n)_n$ *converge en loi vers* $X + a$*, et* $(Y_n X_n)_n$ *converge en loi vers* $aX$*.*

**Proposition 25** *[Ouv04, Ex. 14.7 p.346] Soient* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites de variables aléatoires réelles sur* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *qui convergent respectivement en loi vers deux variables* $X$ *et* $Y$*. On suppose que pour tout* $n$*,* $X_n$ *et* $Y_n$ *sont indépendantes, et que* $X$ *et* $Y$ *le sont aussi. Alors, la suite* $(X_n, Y_n)_n$ *converge en loi vers* $(X, Y)$*.*

### 2.3 Convergence des séries de variables aléatoires

On s'intéresse dans cette section à la convergence de la suite des sommes partielles d'une suite de variables aléatoires réelles indépendantes $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a déjà vu, Section 1.2.2, que l'événement $\{\sum_n X_n \text{ converge}\}$ était de probabilité 0 ou 1. Ci-dessous figurent deux résultats donnant des conditions nécessaires et suffisantes pour obtenir la convergence de la série. Une référence claire est [QZ07, Chap.XIII].

**Théorème 26** *(Théorème de Kolmogorov) [QZ07, p.524] Soit* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de variables aléatoires réelles indépendantes sur* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*.*

1. *On suppose que* $\mathbb{E}[X_n] = 0$*,* $n \in \mathbb{N}$ *et que la série numérique* $\sum_n \mathbb{E}[X_n^2]$ *converge. Alors, la série aléatoire* $\sum_n X_n$ *converge presque sûrement.*
2. *On suppose que la série aléatoire* $\sum_n X_n$ *converge presque sûrement, et que les variables* $X_n$*,* $n \in \mathbb{N}$ *sont bornées uniformément. Alors la série numérique* $\sum_n Var(X_n)$ *converge.*

**Application.** On peut déduire la Loi forte des grands nombres (Section 3.1.2) de ce résultat.

**Théorème 27** *(Théorème des trois séries) [QZ07, p.525] Soient* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de variables aléatoires réelles indépendantes sur* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *et* $(X'_n)_n$ *la suite définie par* $X'_n = X_n \mathbf{1}_{|X_n|\leq 1}$*. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *La série aléatoire* $\sum_n X_n$ *converge presque sûrement.*
2. *Les trois séries numériques suivantes convergent :*

$$\sum_n \mathbb{P}\left(X_n \neq X'_n\right), \quad \sum_n \mathbb{E}\left[X'_n\right], \quad \sum_n Var\left(X'_n\right).$$

**Application -** ***Exercice 10.*** Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles *i.i.d.* centrées et de carré intégrable, non identiquement nulles, et $(a_n)_n$ une suite réelle. Montrer qu'on a équivalence entre

(i) $\sum_n a_n X_n$ converge presque sûrement,
(ii) $\sum_n a_n^2$ converge.
*Indications :* pour l'implication $(ii) \Rightarrow (i)$, on pourra appliquer le Théorème de Kolmogorov. Pour l'implication $(i) \Rightarrow (ii)$, on pourra commencer par montrer que $(a_n)_n$ tend vers 0 (en raisonnant par exemple par l'absurde), puis utiliser la convergence de la série des variances des variables tronquées donnée par le théorème des trois séries.

Les modes de convergence définis ci-dessus ne sont pas tous équivalents pour les suites de variables aléatoires, comme on l'a vu. Pour les séries de variables réelles indépendantes par contre, on a le résultat spécifique suivant.

**Théorème 28** *[QZ07, p.538] Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

*(i)* $\sum_n X_n$ *converge en loi.*

*(ii)* $\sum_n X_n$ *converge en probabilité.*

*(iii)* $\sum_n X_n$ *converge presque sûrement.*

**Remarque.** La preuve de ce résultat est (un peu) difficile. On peut se limiter à un cas particulier simple, celui des variables positives, qui permet de démontrer facilement l'équivalence "(ii) $\Leftrightarrow$ (iii)" (voir [CGCDM11, Ex. 5.8, p. 156]).

# 3 Lois des grands nombres et applications

Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles, dans $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, de même espérance et $(S_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, $n \geq 1$. Les différents énoncés de lois des grands nombres fournissent des conditions suffisantes pour que la suite de variables aléatoires $(S_n/n)_n$ converge vers l'espérance $\mathbb{E}[X_1]$, au sens de l'un des modes de convergence définis ci-dessus. On parlera de *lois faibles* lorsqu'il s'agira de convergence en probabilité ou $L^1$, et de *lois fortes* pour une convergence presque sûre.

L'objectif est la justification (a posteriori) de l'approche fréquentiste en probabilité : les lois des grands nombres vont assurer que si on répète une suite d'expériences aléatoires dans des conditions identiques et de manière indépendante, la suite des fréquences relatives d'apparition d'une certaine propriété liée à cette expérience converge vers la probabilité de l'événement associé à cette propriété. Cela va justifier la stabilité des fréquences d'un événement quand celui-ci se répète un grand nombre de fois (apparition d'une "régularité" dans le hasard). Par exemple, lorsqu'on lance une pièce équilibrée un grand nombre de fois, la suite des fréquences d'apparition du "pile" tend à se stabiliser autour de la valeur $1/2$, probabilité théorique d'apparition du "pile".

Dans cette section, on choisit de commencer par présenter des versions avec des hypothèses restrictives, qui ont l'avantage de se démontrer très facilement et de couvrir tout de même un grand nombre de cas, avant de présenter des énoncés plus généraux dont les preuves sont plus techniques.

## 3.1 Énoncés

On note dans toute cette section $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $(S_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, $n \geq 1$.

### 3.1.1 Lois faibles : convergence en probabilité ou $L^1$

***Cas des variables aléatoires bornées dans $L^2$***

**Proposition 29** *[Dur10, (5.2) p.36] On suppose les variables $X_n$, $n \geq 1$ décorrélées, de même espérance $\mathbb{E}[X_1]$, et telles que Var$(X_n) \leq C < \infty$ pour tout $n \geq 1$. Alors,*

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}[X_1] \quad et \quad \frac{S_n}{n} \xrightarrow{L^2} \mathbb{E}[X_1].$$

**Proposition 30** *(Cas d'un tableau triangulaire de variables aléatoires) [Dur10, (5.4) p.38] Soient $(X_{n,k})_{n\geq 1, 1\leq k\leq n}$ un tableau de variables aléatoires, et $S_n = X_{n,1} + \cdots + X_{n,n}$, $n \geq 1$. Soient $\mu_n = \mathbb{E}[S_n]$ et $\sigma_n^2 = $ Var$(S_n)$. Soit $(b_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle telle que $(\sigma_n^2/b_n^2)_n$ tend vers 0. Alors,*

$$\frac{S_n - \mu_n}{b_n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \quad et \quad \frac{S_n - \mu_n}{b_n} \xrightarrow{L^2} 0.$$

**Application - *Exercice 11.* Le "collectionneur de coupons"** [Dur10, (5.2) p.36].

- Problème : on considère un collectionneur de coupons, qui cherche à obtenir un jeu complet d'une série de $n$ coupons donnés, numérotés de 1 à $n$. Il choisit le $i-$ème coupon de sa collection au hasard dans l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$. On s'intéresse, asymptotiquement, à comprendre combien il doit tirer (acheter !) de coupons avant d'obtenir une collection complète.
- Modélisation : soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires *i.i.d.* de loi uniforme $\mathcal{U}_{\{1,2,\ldots,n\}}$ (suite représentant les coupons tirés). Soit $\tau_k^n = \inf\{m : \mathrm{card}\{X_1, \ldots, X_m\} = k\}$, $k \geq 1$ (premier instant où le collectionneur a $k$ items différents), et $\tau_0^n = 0$. On s'intéresse au comportement asymptotique de $\tau_n^n$ (premier instant où le collectionneur obtient les $n$ items). On pose $X_{n,k} = \tau_k^n - \tau_{k-1}^n$ $(1 \leq k \leq n)$.
  1. Que vaut $\tau_1^n$ ? Que représente $X_{n,k}$ ? Quelle est sa loi, son espérance, sa variance ?
  2. En déduire que
  $$\mathbb{E}[\tau_n^n] = n \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m}, \text{ et } \mathrm{Var}(\tau_n^n) \leq n^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2}.$$
  3. Justifier que $\mathbb{E}[\tau_n^n] \sim_{n\to\infty} n\ln(n)$.
  4. En appliquant la Proposition 30, en déduire que $(\tau_n^n/(n\ln(n)))_n$ converge vers 1 en probabilité.

***Cas des variables aléatoires*** $L^1$

**Proposition 31** *On suppose les variables* $X_n$*,* $n \geq 1$ *i.i.d., et dans* $L^1$*. Alors,*

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}[X_1] \quad et \quad \frac{S_n}{n} \xrightarrow{L^1} \mathbb{E}[X_1].$$

**Attention !** La convergence en probabilité pourra être déduite de la loi forte des grands nombres (Théorème 32), mais pas la convergence $L^1$. [BL12, p.132] propose une démonstration simple de la convergence en probabilité, alors que la convergence $L^1$, plus technique à prouver, est démontrée dans [QZ07, p.528] ou [FF67, p.227].

### 3.1.2 Lois fortes : convergence presque sûre

***Cas des variables aléatoires*** $L^4$

***Exercice 12.*** **Théorème de Cantelli** [CGCDM11, Ex 5.5 p.153]. On suppose les variables $X_n$, $n \geq 1$ *i.i.d.*, centrées et telles que $\mathbb{E}[X_1^4] < \infty$.

1. Calculer $\mathbb{E}[S_n^4]$.
2. En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|S_n/n| > \varepsilon) \leq C/n^2$ pour une certaine constante $C > 0$.
3. Conclure que la suite $(S_n/n)_n$ converge presque sûrement vers 0.

***Cas des variables aléatoires*** $L^1$

**Théorème 32** *(Loi forte des grands nombres) [QZ07, p.526] On suppose les variables* $X_n$*,* $n \geq 1$ *i.i.d., et dans* $L^1$*. Alors,*

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{p.s.} \mathbb{E}[X_1].$$

**Remarques.**

1. La preuve proposée dans [QZ07, p.526] repose sur le Théorème de Kolmogorov pour les séries de variables aléatoires indépendantes (Théorème 26), et sur des résultats intermédiaires portant sur les séries numériques (lemme de Kronecker).
2. **Extensions possibles.**
   - La Loi forte des grands nombres s'étend au cas de vecteurs aléatoires $X_n$, $n \geq 1$ de $\mathbb{R}^d$, $d > 1$. On a encore convergence de $(S_n/n)_n$ vers le vecteur des espérances $\mathbb{E}[X_1]$, sous l'hypothèse que $\mathbb{E}[\|X_1\|]$ est finie, pour $\|.\|$ une norme sur $\mathbb{R}^d$. Il suffit d'appliquer le Théorème 32 à chaque composante du vecteur aléatoire.
   - Il suffit en fait que les variables aléatoires $X_n$, $n \geq 1$ soient indépendantes deux à deux (voir [Tou99, p.20-21]).
   - Il existe des versions de la Loi forte des grands nombres pour des variables indépendantes mais pas nécessairement de même loi (voir [Tou99, p.21-23]).
3. **Réciproque.** Si l'on suppose que la suite $(S_n/n)_n$ converge presque sûrement, alors la variable $X_1$ est intégrable (voir Exercice 2 ci-dessus, ou [BL12, p.132]).

## 3.2 Applications

### 3.2.1 En analyse

***(a) Polynômes de Bernstein et théorème de Weierstrass.*** [QZ07, p.518] ou [Dur10, p.37] ou [Tou99, p.24]

On souhaite démontrer de manière probabiliste que toute fonction $f$ continue sur un segment est limite uniforme sur cet intervalle d'une suite de fonctions polynomiales.

***Exercice 13.*** Soit $f$ une fonction continue sur $[0;1]$. Pour $n \geq 1$, on définit le $n-$ième polynôme de Bernstein (fonction polynomiale) associé à $f$ par

$$B_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right),\ x \in [0;1]$$

1. Justifier qu'il existe une variable aléatoire $S_{n,x}$, dont on précisera la loi, telle que
$$\mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_{n,x}}{n}\right)\right] = B_n f(x).$$
2. Justifier que pour tout $\delta > 0$
$$|B_n f(x) - f(x)| \leq \mathbb{E}\left[\left|f\left(\frac{S_{n,x}}{n}\right) - f(x)\right| \mathbf{1}_{\left|\frac{S_{n,x}}{n} - x\right| < \delta}\right] + 2\|f\|_\infty \frac{x(1-x)}{n\delta^2},$$
où $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0;1]} |f(x)|$.
3. En déduire que la suite de fonctions polynomiales $(B_n f)_n$ converge uniformément vers $f$ sur $[0;1]$.

**Remarques.**

- Ici, la Loi (faible) des grands nombres inspire la définition même de $B_n f$, mais on refait globalement la démonstration pour prouver la convergence uniforme.
- On peut raffiner la démonstration, et obtenir une estimation (optimale) de $\|f - B_n f\|_\infty$.

***(b) Nombres normaux.*** [QZ07, p.503-504, p.550-551]

Tout réel $x \in [0;1[$ admet un développement propre unique en base $r$, pour un entier $r \geq 2$ de la forme
$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n(x)}{r^n},\ \varepsilon_n(x) \in \{0, 1, \ldots, r-1\}$$
(où $\varepsilon_n(x) < r-1$ une infinité de fois). On note $N_{x,b}(n)$ le nombre d'occurences du motif $b = (b_1, \ldots, b_k)$ de $\{0, 1, \ldots, r-1\}$ dans le début $(\varepsilon_1(x), \ldots, \varepsilon_n(x))$ du développement en base $r$ de $x$ (un motif est un mot dont les lettres sont prises dans l'alphabet $\{0, 1, \ldots, r-1\}$) :

$$N_{x,b}(n) = \operatorname{Card}\left\{i \in \{1, \ldots, n-k+1\},\ \varepsilon_i(x) = b_1,\ \varepsilon_{i+1}(x) = b_2, \ldots, \varepsilon_{i+k-1}(x) = b_k\right\}.$$

On dit qu'un nombre est *normal en base* $r$ si pour tout $k$ et tout mot $b$ de longueur $k$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_{x,b}(n)}{n} = \frac{1}{r^k}.$$

On dit qu'un nombre est *normal* s'il l'est en base $r$, pour $r \geq 2$. On peut alors montrer, à l'aide de la Loi forte des grands nombres, que presque tout réel de $[0;1[$ est normal.

***(c) Quelques convergences (et interversions de limites).***

- ***Exercice 14.*** **Convergence de suite d'intégrales.** [Tou99, p.25] (ou [CGCDM11, Ex. 5.12, p.159], avec des hypothèses différentes). Soient $f$ et $g$ deux fonctions intégrables sur $[0;1]$, telles que $0 < f(x) \leq Cg(x)$ pour presque tout $x$ et pour une constante $C > 0$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0;1]^n} \frac{\sum_{i=1}^n f(x_i)}{\sum_{i=1}^n g(x_i)} dx_1 \dots dx_n = \frac{\int_0^1 f(x)dx}{\int_0^1 g(x)dx}.$$

- ***Exercice 15.*** **Convergence de suite.** Soient $\lambda > 0$ et $f \in \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \exp(-n\lambda) \frac{(n\lambda)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right) = f(\lambda).$$

### 3.2.2 En statistique

***(a) Consistance d'estimateurs obtenus par méthode des moments.*** [RS09, p.8]

Soit $\mathbb{X}^n = (X_1, \dots, X_n)$ un $n-$échantillon d'une variable aléatoire $X$ de loi $\nu_\theta$, pour un paramètre $\theta \in \Theta$, $\Theta \subset \mathbb{R}^d$. On note $\mathbb{P}_\theta = (\nu_\theta)^{\otimes n}$ la loi de l'observation statistique $\mathbb{X}^n$. Soient $g : \Theta \to \mathbb{R}^{d'}$, et $\hat{g}_n$ un estimateur de $g(\theta)$ ($\hat{g}_n$ est une fonction mesurable de $\mathbb{X}^n$). L'estimateur $\hat{g}_n$ est dit

- *consistant*, si pour tout $\theta \in \Theta$, $(\hat{g}_n)_n$ converge en probabilité sous $\mathbb{P}_\theta$ vers $g(\theta)$.
- *fortement consistant*, si pour tout $\theta \in \Theta$, $(\hat{g}_n)_n$ converge $\mathbb{P}_\theta-$presque sûrement vers $g(\theta)$.

La Loi faible (respectivement forte) des grands nombres justifie la méthode dite des moments pour construire des estimateurs (resp. fortement) consistants. Le principe de la méthode est le suivant : s'il existe une fonction $\Phi$ telle que $\Phi(X) \in L^1$, et telle que $g(\theta) = \mathbb{E}_\theta[\Phi(X_1)]$ (pour $\mathbb{E}_\theta$ l'espérance sous $\mathbb{P}_\theta$), alors un estimateur fortement consistant de $g(\theta)$ est

$$\hat{g}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Phi(X_i).$$

**Exemple. Estimation d'une proportion - Modèle de Bernoulli.** Lors d'un sondage, on interroge $n$ personnes (choisies au hasard) sur les résultats d'une élection à deux candidats $A$ et $B$, ou sur une question à deux réponses possibles (oui ou non). Le but est d'estimer la proportion $\theta$ de la population en faveur du candidat $A$, ou ayant répondu "oui" à la question posée. On note $X_i = 1$ si le $i-$ième individu est en faveur de $A$ ou a répondu "oui" à la question. On modélise les variables $X_1, \dots, X_n$ comme étant *i.i.d.* de loi $\nu_\theta = \mathcal{B}(\theta)$, $\theta \in \Theta = [0;1]$. Comme $\mathbb{E}[X_1] = \theta$, la moyenne empirique $\overline{X}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i$ est un estimateur fortement consistant de $\theta$.

***(b) Exemple de la fonction de répartition empirique, théorème de Glivencko-Cantelli.***

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un $n-$échantillon d'une variable aléatoire réelle $X$ de fonction de répartition $F$. Soit

$$\hat{F}_n \,:\, x \in \mathbb{R} \;\mapsto\; \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{X_i \leq x},$$

la fonction de répartition empirique associée. La méthode des moments (et donc la Loi forte des grands nombres) justifie que cette fonction est un estimateur fortement consistant de la fonction de répartition $F$ : pour tout $x$, on a convergence presque sûre de la suite $(\hat{F}_n(x))_n$ vers $F(x) = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{X\leq x}]$. Le théorème ci-dessous améliore ce résultat en prouvant la convergence uniforme de la suite de fonctions $(\hat{F}_n)_n$ vers $F$.

**Théorème 33** *(Théorème de Glivencko-Cantelli) [Dur10, (7.4) p.59] ou [BC07, p.71] ou [Ouv04, p.116] ou [RS09, p.85] Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes i.i.d. de fonction de répartition $F$, et $(\hat{F}_n)_n$ la suite des fonctions de répartition empiriques associées. Alors presque sûrement,*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\hat{F}_n(x) - F(x)| \xrightarrow{p.s.} 0.$$

**Application. Construction d'un test d'adéquation à une loi : test non-paramétrique de Kolmogorov-Smirnov.** [RS09, p.87-89] Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un $n-$échantillon de loi de fonction de répartition $F$ continue. Soit $F_0$ la fonction de répartition d'une loi de référence fixée. On veut tester $H_0 : F = F_0$ contre $H_1 : F \neq F_0$. Le Théorème de Glivencko Cantelli justifie qu'une statistique de test intéressante est

$$D_n = \sup_{x\in\mathbb{R}} |\hat{F}_n(x) - F(x)|.$$

En effet, il permet de justifier que $\underline{\lim}_{n\to\infty} D_n > 0$ p.s. sous $H_1$. On peut aussi montrer que sous $H_0$, $D_n$ suit une loi ne dépendant pas de $F_0$, et tabulée. Ceci permet de bâtir un test de taille $\alpha$ : définition d'une région de rejet pour $H_0$ (voir cours de statistique un peu plus tard...).

### 3.2.3 Méthodes de Monte-Carlo

**Principe.**

Soit $X$ une variable aléatoire, et $f$ une fonction à valeurs réelles mesurable telle que $f(X)$ soit intégrable. Les méthodes de Monte-Carlo recouvrent un ensemble général de problèmes où l'on cherche à calculer $\mathbb{E}[f(X)]$, en l'approchant par la moyenne empirique. Une référence pour tout ce qui concerne ces méthodes peut être [Tou99, Chap.4] (excepté pour l'Exemple 2 ci-dessous).

**Exemple 1. Calcul approché d'intégrales (multiples).**

- On souhaite calculer $I = \int_{[0;1]^d} f(x)dx$ pour une fonction intégrable $f$. On peut écrire $I = \mathbb{E}[f(X)]$ pour $X = (U_1, \ldots, U_d)$ un vecteur de $d$ variables aléatoires *i.i.d.* de loi uniforme $\mathcal{U}_{[0;1]}$. Si on a un $n-$échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ du vecteur $X$, la Loi des grands nombres justifie que l'on peut approcher $I$ par $\sum_{i=1}^n f(X_i)/n$.
- On souhaite calculer $I = \int f(x)p(x)dx$, où $p$ est une fonction positive d'intégrale 1. On a alors $I = \mathbb{E}[f(X)]$ pour $X$ une variable aléatoire de loi de densité $p$. Si on a un $n-$échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ de loi de densité $p$, obtenu par simulation par exemple (voir TP), la Loi des grands nombres justifie que l'on peut approcher à nouveau $I$ par $\sum_{i=1}^n f(X_i)/n$.

**Exemple 2. Obtention de résultats non-asymptotiques (variables de lois difficile à estimer).** [RS09, p.106]

Les méthodes de Monte-Carlo permettent de calculer le niveau exact à un rang fixé d'un intervalle de confiance asymptotique.

En effet, on suppose disposer d'un $n-$échantillon $\mathbb{X}^n = (X_1, \dots, X_n)$ de loi dépendant d'un paramètre $\theta$. On suppose avoir construit un intervalle (ou une région) de confiance $I(\mathbb{X}^n)$ asymptotique de niveau $\alpha \in ]0;1[$, ce qui signifie $\underline{\lim}_{n\to\infty} \mathbb{P}(\theta \in I(\mathbb{X}^n)) \geq 1-\alpha$ (voir aussi Section 4.2.3 (b) ci-dessous). On souhaite connaître le niveau exact de cet intervalle à un rang $n$ fixé (*ie.* pour un nombre d'observations donné). Ce niveau est donné par $\mathbb{P}(\theta \in I(\mathbb{X}^n)) = \mathbb{E}[Y]$ pour $Y = \mathbf{1}_{\theta\in I(\mathbb{X}^n)}$. Si on peut disposer d'un échantillon $(Y_1, \dots, Y_n)$ de la variable $Y$, alors on peut à nouveau approcher $\mathbb{E}[Y]$ par la moyenne empirique correspondante. La méthode de Monte-Carlo est alors utile pour approcher des espérances de variables dont la loi exacte est difficile à calculer, mais facile à simuler (voir TP pour un exemple).

# 4 Théorème Central limite et applications

Il découle de la Loi forte des grands nombres que pour une suite $(X_n)_n$ *i.i.d.* intégrables, $(X_1 + \cdots + X_n)/n = \mathbb{E}[X_1] + o(1)$ p.s. Le Théorème Central limite précise le comportement en loi du "$o(1)$", en donnant la loi limite de $\sqrt{n}(S_n/n - \mathbb{E}[X_1])$.

## 4.1 Énoncé et raffinements

### 4.1.1 Énoncé du théorème

**Théorème 34** *(Théorème Central limite) [QZ07, p.540] Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles i.i.d. définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, de carré intégrable. Soit $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, $n \geq 1$. Alors,*

$$\frac{S_n - n\mathbb{E}[X_1]}{\sqrt{Var(X_1)}\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N$$

*où $N$ est une variable de loi $\mathcal{N}(0;1)$ (loi normale centrée réduite).*

**Exemple. Théorème de De Moivre-Laplace.** [Dur10, p.79] On suppose que $X_1$ suit la loi de Rademacher $\mathcal{R}(1/2)$. Alors quels que soient les réels $a < b$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(a \leq \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx.$$

Ce cas particulier "historique" du théorème ci-dessus a l'avantage de pouvoir être démontré directement (et sans utiliser les outils pointus -et relativement récents- que sont la fonction caractéristique et le Théorème de Lévy), en utilisant essentiellement la formule de Stirling : $n! \sim_{n\to\infty} n^n \exp(-n)\sqrt{2\pi n}$.

**Remarques.**

1. **Extension au cas vectoriel.** [Ouv04, p.325] Supposons maintenant que les variables $X_n$, $n \geq 1$, ne sont plus réelles mais à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ : $X_n = (X_{1,n}, X_{2,n}, \dots, X_{d,n})$

(toujours *i.i.d.* et $L^2$). Alors,

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\sum_{i=1}^n X_{1,i} - \mathbb{E}[X_{1,1}]}{\sqrt{n}} \\ \dfrac{\sum_{i=1}^n X_{2,i} - \mathbb{E}[X_{2,1}]}{\sqrt{n}} \\ \vdots \\ \dfrac{\sum_{i=1}^n X_{d,i} - \mathbb{E}[X_{d,1}]}{\sqrt{n}} \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}} N = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \vdots \\ N_d \end{pmatrix},$$

où $N$ suit la loi normale multidimensionnelle $\mathcal{N}_d(0, K_{X_1})$ ($K_{X_1}$ étant la matrice de covariance de $X_1$).

2. **Réciproque.** [FF67, p.244] Si $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables réelles *i.i.d.* telles que $(S_n/\sqrt{n})_n$ converge en loi vers $N \sim \mathcal{N}(0,1)$, alors $X_1 \in L^2$, $\mathbb{E}[X_1] = 0$ et $\mathbb{E}[X_1^2] = 1$.

### 4.1.2 Vitesse de convergence

**Théorème 35** *(Théorème de Berry-Esseen) [Dur10, (4.9) p.126] Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles i.i.d. définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, admettant un moment d'ordre 3, telles que $\mathbb{E}[X_1] = 0$, $\mathbb{E}[X_1^2] = 1$, et $\mathbb{E}[|X_1^3|] = \rho < \infty$. Soit $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, $n \geq 1$. Enfin, soit $F_n$ la fonction de répartition de la variable $S_n/(\sigma\sqrt{n})$, $n \geq 1$ et $\Phi$ la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$. Alors,*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x) - \Phi(x)| \leq \frac{3\rho}{\sigma^3\sqrt{n}}.$$

### 4.1.3 Autres versions

#### (a) Cas de tableaux triangulaires de variables aléatoires

**Théorème 36** *(Théorème de Lindeberg-Feller) [Dur10, (4.5) p.116] Soit, pour tout $n \geq 1$, $(X_{n,m})_{1\leq m\leq n}$ des variables aléatoires réelles indépendantes, centrées. On suppose*

- $\lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^n \mathbb{E}[X_{n,m}^2] = \sigma^2 > 0$,
- $\forall \varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^n \mathbb{E}\left[X_{n,m}^2 \mathbf{1}_{|X_{n,m}|>\varepsilon}\right] = 0 \text{ (condition de Lindeberg).}$$

*Alors,*

$$S_n = X_{n,1} + \cdots + X_{n,n} \xrightarrow{\mathcal{L}} \sigma N$$

*où $N$ est une variable de loi $\mathcal{N}(0;1)$.*

**Remarque. Autre formulation.** Avec les mêmes notations et sous les mêmes hypothèses, la formulation du Théorème de Lindeberg-Feller est parfois la suivante : on note $s_n^2 =$

$\sum_{m=1}^{n} \mathbb{E}[X_{n,m}^2]$ et on suppose que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n^2} \sum_{m=1}^{n} \mathbb{E}\left[X_{n,m}^2 \mathbf{1}_{\frac{|X_{n,m}|}{s_n}>\varepsilon}\right] = 0.$$

Alors,

$$\frac{S_n}{s_n} = \frac{X_{n,1} + \cdots + X_{n,n}}{s_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} N \sim \mathcal{N}(0;1).$$

**Application - *Exercice 16.* Convergence de la médiane d'un échantillon** [CGCDM11, Ex. 4.19, p.131] Soient $n \geq 1$ et $(X_m)_{m\in\{1,\ldots,2n-1\}}$ un échantillon (de taille impaire) de variables *i.i.d.* de loi $\mathcal{U}_{[0;1]}$. Soient $(X_{(1)} \leq \cdots \leq X_{(2n-1)})$ les statistiques d'ordre associées. On s'intéresse à la convergence en loi de la médiane $X_{(n)}$ de l'échantillon : on veut montrer que $(\sqrt{8n}(X_{(n)} - 1/2))_n$ converge en loi vers la loi $\mathcal{N}(0;1)$.

On définit les variables $(Y_{n,m})_{m\in\{1,\ldots,2n-1\}}$ par

$$Y_{n,m} = \begin{cases} 1 \text{ si } X_m < 1/2 + t/\sqrt{8n}, \\ -1 \text{ si } X_m \geq 1/2 + t/\sqrt{8n}, \end{cases}$$

et on pose $S_{2n-1} = \sum_{m=1}^{2n-1} Y_{n,m}$.

1. Montrer que la loi de $Y_{n,m}$ est la loi de Rademacher $\mathcal{R}(p_n)$ avec $p_n = 1/2 + t/\sqrt{8n}$ (on suppose $n$ assez grand pour que cette quantité appartienne à $[0;1]$).
2. Appliquer le Théorème de Lindeberg-Feller à la suite $(\sum_{m=1}^{2n-1} Y_{n,m} - \mathbb{E}[Y_{n,m}])_n$. En déduire la limite de $(\mathbb{P}(S_{2n-1} \geq 0))_n$. *Indication :* pour ce dernier point, on pourra utiliser le résultat de la première application de la Section 2.2.3.
3. Conclure.

### (b) Cas d'un nombre aléatoire de variables aléatoires

***Exercice 17.*** [CGCDM11, Ex 4.18, p.129] Soit $(X_n)_{n\geq1}$ une suite de variables aléatoires réelles *i.i.d.*, centrées, de variance $\sigma^2$. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, $n \geq 1$. Soit $(N_k)_{k\geq1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}\backslash\{0\}$, indépendantes de la suite $(X_n)_n$. On suppose que $(N_k)_k$ converge vers $\infty$ presque sûrement (quand $k \to \infty$). L'objectif est de prouver que

$$\frac{S_{N_k}}{\sqrt{N_k}} = \frac{1}{\sqrt{N_k}} \sum_{n=1}^{N_k} X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \sigma N$$

où $N$ est une variable de loi $\mathcal{N}(0;1)$.

On note $\varphi_k$ la fonction caractéristique de la variable $S_{N_k}/\sqrt{N_k}$, $k \geq 1$.

1. Montrer que pour $t \in \mathbb{R}$,
$$\varphi_k(t) = \sum_{n\geq1} \mathbb{P}\left(N_k = n\right) \varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t).$$
2. Soient $t \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$ fixés. Montrer qu'il existe un rang $n_0$ tel que, pour tout $k \geq 1$,
$$\left|\varphi_k(t) - \exp\left(-\sigma^2 \frac{t^2}{2}\right)\right| \leq 2\mathbb{P}\left(N_k < n_0\right) + \varepsilon \mathbb{P}\left(N_k \geq n_0\right).$$
3. Conclure.

## 4.2 Applications

### 4.2.1 En analyse

***Exercice 18.*** [CGCDM11, Ex 4.15, p.127] Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ la suite réelle définie par $a_n = \exp(-n)\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}$. Montrer que la suite $(a_n)_n$ converge vers 1/2.

### 4.2.2 En probabilités

***Exercice 19.*** **Caractérisation de la loi gaussienne** [CGCDM11, Ex 4.17, p.128] Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes et de même loi de variance finie $\sigma^2$. On suppose que $(X+Y)/\sqrt{2}$ a même loi que $X$ et $Y$. On veut montrer que cette loi est la loi $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$.

1. Montrer que $\mathbb{E}[X]=0$.
2. L'idée est d'appliquer un grand nombre de fois la propriété "$(X+Y)/\sqrt{2}$ a même loi que $X$" pour en déduire le résultat en appliquant le Théorème Central limite.
   (a) Montrer par récurrence sur $n\geq 1$ que si $X_i, Y_i$, $i=1,\dots,2^{n-1}$ sont des variables indépendantes de même loi que $X$, alors la variable
   $$\frac{X_1+\dots+X_{2^{n-1}}+Y_1+\dots+Y_{2^{n-1}}}{\sqrt{2^n}}$$
   a même loi que $X$.
   (b) En déduire le résultat.

### 4.2.3 En statistique

***(a) Normalité asymptotique d'estimateurs.*** [RS09, p.11]

On reprend les notations introduites en Section 3.2.2 (paragraphe sur la consistance d'estimateurs). Un estimateur $\hat{g}_n$ de $g(\theta)$ est dit asymptotiquement normal si

$$\sqrt{n}\,(\hat{g}_n - g(\theta)) \xrightarrow{\mathcal{L}} Z_\theta,$$

où $Z_\theta$ suit une loi normale $\mathcal{N}(0,\sigma^2(\theta))$ (convergence en loi sous $\mathbb{P}_\theta$, à vitesse $\sqrt{n}$, et vers une gaussienne). Le Théorème Central limite est l'outil classique permettant de prouver ce type de convergence. C'est le cas dans l'exemple de l'estimation d'une proportion donné en Section 3.2.2 (voir ci-dessous aussi).

***(b) Construction d'intervalles (de régions) de confiance asymptotiques***

Toujours avec les notations de la Section 3.2.2, on souhaite bâtir une région de confiance asymptotique pour $g(\theta)$ au niveau $1-\alpha$, c'est-à-dire une suite d'ensembles $(\hat{C}_n)_n$ construits mesurablement sur l'observation $\mathbb{X}^n=(X_1,\dots,X_n)$ et tels que pour tout $\theta\in\Theta$,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \mathbb{P}_\theta\left(g(\theta)\notin \hat{C}_n\right)\leq \alpha.$$

Si l'on dispose de $\hat{g}_n$ un estimateur de $g(\theta)\in\mathbb{R}$, on cherche par exemple $q_n$ tel que

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \mathbb{P}_\theta\left(|\hat{g}_n - g(\theta)|\geq q_n\right)\leq \alpha,$$

l'intervalle de confiance asymptotique étant alors $[\hat{g}_n - q_n; \hat{g}_n + q_n]$. Supposons que $\hat{g}_n$ soit asymptotiquement normal, de variance limite $\sigma^2(\theta)$ (comme dans la définition ci-dessus). On cherche alors $q$ tel que,

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}_\theta\left(\sqrt{n}\frac{|\hat{g}_n - g(\theta)|}{\sqrt{\sigma^2(\theta)}}\geq q\right) = \mathbb{P}_\theta(|N|\geq q)\leq \alpha,$$

où $N \sim \mathcal{N}(0;1)$. Or,

$$\mathbb{P}_\theta(|N| \geq q) \leq \alpha \ \Leftrightarrow\ \mathbb{P}_\theta(N \leq q) \geq 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

Il suffit alors de choisir $q = q_{1-\alpha/2}$ le quantile d'ordre $1 - \alpha/2$ de la loi $\mathcal{N}(0;1)$. L'intervalle obtenu, $[\hat{g}_n - q_{1-\alpha/2}\sqrt{\sigma^2(\theta)/n}; \hat{g}_n + q_{1-\alpha/2}\sqrt{\sigma^2(\theta)/n}]$ n'est pas un intervalle de confiance, car il dépend de $\sigma^2(\theta)$. Si cette variance est majorée par une constante $\Sigma$ uniformément en $\theta$, on peut la remplacer par $\Sigma$, puisque

$$\mathbb{P}_\theta\left(\sqrt{n}\frac{|\hat{g}_n - g(\theta)|}{\sqrt{\Sigma}} \geq q\right) \leq \mathbb{P}_\theta\left(\sqrt{n}\frac{|\hat{g}_n - g(\theta)|}{\sqrt{\sigma^2(\theta)}} \geq q\right).$$

On peut aussi avoir recours dans ce cadre à des méthodes dites de stabilisation de la variance, données par la méthode delta, théorème limite important en statistique (basé sur le Lemme de Slutzky).

**Théorème 37** *[RS09, p.12] Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\lim_{n\to\infty} r_n = \infty$, et $\psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d'}$ une application différentiable en un point $u \in \mathbb{R}^d$, de jacobienne $D\psi(u) \in \mathcal{M}_{d',d}$. On suppose qu'il existe une variable aléatoire $V$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ telle que*

$$r_n\left(X_n - u\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} V.$$

*Alors on a aussi*

$$r_n\left(\psi(X_n) - \psi(u)\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} D\psi(u)V.$$

**Exemple. Estimation d'une proportion - Modèle de Bernoulli (suite).** Si l'on reprend l'exemple introduit en Section 3.2.2, la suite $(\sqrt{n}(\overline{X}_n - \theta))_n$ converge en loi vers $Z_\theta \sim \mathcal{N}(0, \theta(1-\theta))$. On peut majorer la variance limite (par $1/4$) pour obtenir un intervalle de confiance asymptotique, mais on peut aussi chercher une fonction $\psi$ à laquelle appliquer le théorème précédent, de telle sorte que

$$\sqrt{n}\left(\psi(\overline{X}_n) - \psi(\theta)\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} N \sim \mathcal{N}(0, \psi'(\theta^2)\theta(1-\theta)) = \mathcal{N}(0,1).$$

Il suffit de prendre $\psi(\theta) = 2\arcsin(\sqrt{\theta})$, et l'on obtient un intervalle de confiance asymptotique de la forme

$$\left[\sin^2\left(\arcsin\left(\sqrt{\overline{X}_n}\right) - \frac{q_{1-\alpha/2}}{2\sqrt{n}}\right), \sin^2\left(\arcsin\left(\sqrt{\overline{X}_n}\right) + \frac{q_{1-\alpha/2}}{2\sqrt{n}}\right)\right].$$

***(c) Vitesse de convergence pour la méthode de Monte-Carlo [Tou99, Chap.4] [RS09, p.106-107]***

Dans la présentation (rapide) des méthodes de Monte-Carlo en Section 3.2.3, on a vu que les Lois des grands nombres permettaient de justifier l'approximation de $I = \mathbb{E}[Y]$ par $\sum_{i=1}^n Y_i/n$, pour $(Y_1, \ldots, Y_n)$ un $n-$échantillon de la variable aléatoire $Y$. La suite des erreurs d'approximation est $(\varepsilon_n)_n$ avec

$$\varepsilon_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i - \mathbb{E}[Y].$$

Le Théorème Central limite entraîne (si $Y$ est de carré intégrable) la convergence en loi de $(\sqrt{n}\varepsilon_n)_n$ vers une loi $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$, avec $\sigma^2 = \mathrm{Var}(Y)$, et donc, avec la méthode de construction d'intervalles de confiance ci-dessus,

$$I \in \left[\overline{Y}_n - q_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{Y}_n + q_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right],$$

avec probabilité limite $1-\alpha$. La précision des méthodes de Monte-Carlo ne dépend donc que de $\sigma^2$ et de $n$, et est de l'ordre $\sigma/\sqrt{n}$. Cette vitesse de convergence peut sembler lente par rapport aux méthodes numériques déterministes d'approximation d'intégrales (méthode des trapèzes, de Simpson...), mais en contrepartie, elle ne dépend pas de la régularité de la fonction à intégrer, et ne dépend que faiblement de la dimension (si on calcule une intégrale en dimension $d$, le nombre $n$ de tirages à faire ne sera pas modifié, seul $\sigma$ risque d'augmenter). Les méthodes de Monte-Carlo sont donc essentiellement utilisées pour calculer des intégrales multiples.

On aura donc intérêt à réduire le plus possible la variance $\sigma^2$, d'où de nombreuses méthodes dites de "réduction de la variance" (variables antithétiques, échantillonnage préférentiel... voir TP et [Tou99, Chap.4]).

***(d) Test du $\chi^2$ d'ajustement à une loi donnée [RS09, Chap.6]***

Le Théorème Central limite dans sa version vectorielle permet de démontrer la convergence en loi de la statistique qui est à la base de test du $\chi^2$ d'ajustement à une loi de référence. Le résultat utilise également d'autres outils, dont le Théorème de Cochran. On se reportera au cours de statistique, un peu plus tard...

## 4.3 Pour aller plus loin...

Pour $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles *i.i.d.* centrées, $L^2$, et $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, les Lois des grands nombres donnent le comportement de $(S_n/n)_n$ (convergence presque sûre vers 0) et le Théorème Central limite celui de $(S_n/\sqrt{n})_n$ (convergence en loi vers $\mathcal{N}(0;1)$. On peut également déduire du Théorème Central limite que $(S_n/\sqrt{n})_n$ ne converge pas presque sûrement.

***Exercice 20.*** On considère les notations et hypothèses ci-dessus. On suppose de plus que les variables $X_n$ sont de variance strictement positives. On va montrer

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{S_n}{\sqrt{n}} = \infty \text{ p.s. (et } \underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{S_n}{\sqrt{n}} = -\infty).$$

1. Montrer que la variable aléatoire $\overline{\lim}_{n\to\infty} S_n/\sqrt{n}$ est constante presque sûrement. On note $c \in [-\infty,+\infty]$ sa valeur presque sûre.
2. On raisonne par l'absurde, en supposant $c < \infty$. Soit alors $c' > c$ ($c' < \infty$).
   (a) Montrer que $\lim_{N\to\infty}\mathbb{P}(\sup_{n\geq N} S_n/\sqrt{n} \geq c') = 0$.
   (b) Qu'implique par ailleurs le Théorème Central limite pour $\lim_{N\to\infty}\mathbb{P}(S_N/\sqrt{N} \geq c')$ ?
   (c) Conclure.

Il est maintenant naturel de s'interroger sur le comportement de suites de type $(S_n/a_n)_n$ pour $(a_n)_n$ une suite réelle strictement positive représentant une "normalisation" entre $\sqrt{n}$ et $n$.

On donne d'abord quelques exemples de résultats pouvant s'obtenir relativement facilement (toujours avec les notations et hypothèses ci-dessus) :

1. [BL12, p.140] On suppose que $\lim_{n\to\infty} a_n/\sqrt{n} = \infty$. Alors, $(S_n/a_n)_n$ converge vers 0 en probabilité (appliquer l'inégalité de Markov).
2. [Dur10, (8.8) p.66] Soit $1 < p < 2$. On suppose que les variables $X_n$, $n \geq 1$ sont dans $L^p$ (l'appartenance à $L^2$ n'est pas requise). Alors, $(S_n/n^{1/p})_n$ converge vers 0 presque sûrement (preuve déjà un peu plus technique).
3. [Dur10, (8.7) p.66] ou [QZ07, p.529-530] Pour tout $\varepsilon > 0$, $(S_n/(n^{1/2}(\ln(n))^{1/2+\varepsilon}))_n$ converge vers 0 presque sûrement (appliquer le théorème de Kolmogorov -Théorème 26-, et se rappeler des critères de convergence des séries de Bertrand).

Le résultat suivant, beaucoup plus difficile (voir éventuellement un cas particulier dans [QZ07, p.530]) indique que si $(a_n)_n$ est trop proche de $\sqrt{n}$, on n'obtient plus de convergence de type loi des grands nombres.

**Théorème 38** *(Loi du logarithme itéré) [Dur10, p.434-439] Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles i.i.d. sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, centrées et de variance 1. Alors,*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{S_n}{\sqrt{2n\ln(\ln(n))}} = 1 \text{ p.s., et } \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{S_n}{\sqrt{2n\ln(\ln(n))}} = -1 \text{ p.s.}$$

**Remarque.** Si les $X_n$ ne sont plus centrées, ni de variance 1, le résultat porte alors sur la suite $((S_n - n\mathbb{E}[X_1])/\sqrt{2n\ln(\ln(n))})_n$, la valeur de la limite supérieure est $\sqrt{\mathrm{Var}(X_1)}$, celle de la limite inférieure $\sqrt{\mathrm{Var}(X_1)}$.

## Références


[BC07] Bernard Bercu et Djalil Chafaï : *Modélisation stochastique et simulation - Cours et applications*. 2007.

[BL12] Philippe Barbe et Michel Ledoux : *Probabilité (L3M1)*. EDP Sciences, 2012.

[BP00] Marc Briane et Gilles Pages : *Théorie de l'intégration : licence de mathématiques ; cours et exercices*. Vuibert, 2000.

[CGCDM11] Marie Cottrell, Valentine Genon-Catalot, Christian Duhamel et Thierry Meyre : *Exercices de probabilités : licence, master, écoles d'ingénieurs*. Cassini, 2011.

[Dur10] Rick Durrett : *Probability : theory and examples*. Cambridge university press, 2010.

[Far06] Jacques Faraut : *Calcul intégral*. EDP sciences, 2006.

[FF67] Dominique Foata et Aimé Fuchs : *Calcul des probabilités*. Masson, 1967.

[Ouv04] Jean-Yves Ouvrard : *Probabilités tome 2, Maîtrise–Agrégation*. Cassini, 2004.

[QZ07] Hervé Queffélec et Claude Zuily : *Analyse pour l'agrégation*. Dunod, 2007.

[RS09] Vincent Rivoirard et Gilles Stoltz : *Statistique en action*. Cassini, 2009.

[Tou99] Paul Toulouse : *Thèmes de probabilités et statistique (Agrégation de mathématiques)*. Dunod, 1999.