**Exercice 1**

Soit $\mathcal{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.

On peut écrire $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$. Montrons que $\mathcal{U}$ est un sous groupe de $(\mathbb{C}, \times)$

- $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ par définition.
- $\mathcal{U} \neq \emptyset$ car par exemple, $1 \in \mathcal{U}$, $(|1| = 1)$.
- Soient $z_1, z_2 \in \mathcal{U}$.

Alors
- $|z_1 \times z_2| = |z_1|\,|z_2| \overset{\text{car } z_1, z_2 \in \mathcal{U}}{=} 1 \times 1 = 1$ donc $z_1 \times z_2 \in \mathcal{U}$ ($\mathcal{U}$ est stable par produit).
- $|z_1^{-1}| = \left|\frac{1}{z_1}\right| = \frac{1}{|z_1|} \underset{\text{car } z_1 \in \mathcal{U}}{=} \frac{1}{1} = 1$ donc $z_1^{-1} \in \mathcal{U}$. ($\mathcal{U}$ est stable par passage à l'inverse).

Ainsi $\mathcal{U}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}, \times)$.

**Exercice 2**

$n \in \mathbb{N}$

1) Montrer que $7 \mid 3^{2n+1} + 2^{n+2}$, c'est montrer par exemple que $3^{2n+1} + 2^{n+2} \equiv 0[7]$.

. $3^1 \equiv 3[7]$ ; $3^2 = 9 \equiv 2[7]$ donc $3^{2n} = (3^2)^n \equiv 2^n [7]$, puis $3^{2n+1} \equiv 2^n \times 3\ [7]$

. $2^2 = 4 \equiv 4[7]$ donc $2^{n+2} \equiv 2^n \times 4[7]$

Ainsi $3^{2n+1} + 2^{n+2} \equiv 2^n \times 3 + 2^n \times 4[7] \equiv 2^n(3+4)[7] = 2^n \times 7[7] \equiv 0[7]$ car $7 \mid 2^n \times 7$ !

2) $2y \equiv 6[8]$ à résoudre.

| $y = ?[8]$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2y = ?[8]$ | 0 | 2 | 4 | 6 | 0 | 2 | 4 | 6 |

donc $y$ est solution de $2y \equiv 6[8]$ si $y \equiv 3[8]$ ou $y \equiv 7[8]$

c'est à dire si il existe $k \in \mathbb{Z}$, $y = 8k+3$ ou $y = 8k+7$.

L'ensemble des solutions est donc $\{8k+3, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{8k+7, k \in \mathbb{Z}\}$

**Exercice 3**

$E, F, G$ 3 ensembles. $u : E \to F$, $v : F \to G$ injectives $v \circ u : E \to G$

Montrons que $v \circ u$ est injective, c'est à dire que $\forall x, x' \in E$, $v \circ u(x) = v \circ u(x') \Rightarrow x = x'$.

Soient $x, x' \in E$. Supposons $v \circ u(x) = v \circ u(x')$ et montrons que $x = x'$.

$v \circ u(x) = v \circ u(x')$ se réécrit $v[u(x)] = v[u(x')]$. Or $u(x), u(x') \in F$, et $v$ est injective de $F$ dans $G$.

donc $u(x) = u(x')$.

Puis, par injectivité de $u$, $x = x'$.

Ainsi $v \circ u$ est injective.