SUJET 1

Exercice 1 Forme algébrique de $z=\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^8$ avec $z_1=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ et $z_2=\sqrt{3}-i$.

. On met z_1 et z_2 sous forme exponentielle :

- $|z_1|=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}=2$ donc $z_1=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=2e^{i\pi/4}$.
- $|z_2|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}=2$ donc $z_2=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)=2\left(\cos\frac{-\pi}{6}+i\sin\frac{-\pi}{6}\right)=2e^{-i\pi/6}$.

. Ensuite, $z=\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^8=\left(\frac{2e^{i\pi/4}}{2e^{-i\pi/6}}\right)^8=\left(e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)}\right)^8=\left(e^{i\frac{5\pi}{12}}\right)^8=e^{i\frac{5\times 8\pi}{12}}=e^{i10\pi/3}=e^{i2\pi}\times e^{i\frac{4\pi}{3}}=e^{i4\pi/3}=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$.

Ainsi $z=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Exercice 2 Soit $n\in\mathbb{N}, n\neq 0$. $(z+i)^n=(z-i)^n$ (E).

Le nombre complexe $z=i$ n'est pas solution de l'équation (car $(i+i)^n=(2i)^n\neq(i-i)^n=0$). Donc l'équation équivaut à $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n=$

Posons $Z=\frac{z+i}{z-i}$. Avec cette nouvelle inconnue, l'équation devient $Z^n=1$. Donc Z est une racine $n$ième de l'unité

Par le cours, on sait que $Z=e^{2ik\pi/n}$, $k\in\{0,1,2,\dots n-1\}$.

Ainsi $\frac{z+i}{z-i}=e^{2ik\pi/n}$ $k\in\{0,1,2,\dots,n-1\}$ $\iff$ $z+i=e^{2ik\pi/n}(z-i)$, $k\in\{0,1,\dots n-1\}$

$\iff$ $(1-e^{2ik\pi/n})z=-i(1+e^{2ik\pi/n})$, $k\in\{0,1\dots n-1\}$

mais si $k=0$, ceci donne $(1-1)z=-i(1+1)$. Impossible !

donc l'équation précédente équivaut à $(1-e^{2ik\pi/n})z=-i(1+e^{2ik\pi/n})$, $k\in\{1,\dots,n-1\}$

$\iff$ $z=-i\,\frac{1+e^{2ik\pi/n}}{1-e^{2ik\pi/n}}$ $k\in\{1,2,\dots n-1\}$. On a trouvé les solutions de (E).

Montrons maintenant que z est en fait réel.

On applique la méthode de l'arc moitié.

$$z=-i\,\frac{e^{ik\pi/n}\left(e^{-ik\pi/n}+e^{ik\pi/n}\right)}{e^{ik\pi/n}\left(e^{-ik\pi/n}-e^{ik\pi/n}\right)}=-i\,\frac{2\cos\frac{k\pi}{n}}{2\sin\frac{k\pi}{n}}=\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\frac{k\pi}{n}}=\frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{n}\right)}\in\mathbb{R}.$$

Donc les solutions de l'équation (E) sont les $n-1$ nombres réels $\frac{1}{\tan\frac{k\pi}{n}}$, $k\in\{0,1\dots n-1\}$.

Exercice 3 On cherche les complexes Z tels que $Z^2=1+2i$.

Cherchons Z sous la forme $Z=x+iy$, $x,y\in\mathbb{R}$.

$$Z^2=1+2i \iff (S)\begin{cases}x^2-y^2=1\\ x^2+y^2=|1+2i|=\sqrt{5}\\ 2xy=2\end{cases} \iff \begin{cases}2x^2=1+\sqrt{5}\\ x^2-y^2=1\\ xy=1\end{cases} \iff \begin{cases}x^2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\\ y^2=x^2-1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\\ xy>0\end{cases} \iff \begin{cases}x=\pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\\ y=\pm\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\\ x \text{ et } y \text{ ont m̂ signe}\end{cases}$$

donc les solutions du système (S) sont $\begin{cases}x=\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\\ y=\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\end{cases}$ et $\begin{cases}x=-\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\\ y=-\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\end{cases}$

Ainsi, les 2 racines carrées de $z=1+2i$ sont $Z_1=\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}+i\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$ et $Z_2=-Z_1$.

Exercice 4 Linéarisation de $\sin^4\theta$, $\theta\in\mathbb{R}$.

Par la formule d'Euler $\sin^4\theta=\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^4=\frac{1}{2^4 i^4}\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)^4=\frac{1}{2^4}\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)^4$.

or, par la formule du binôme de Newton, $(a+b)^4=\sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}(b)^k a^{4-k}=a^4+4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$, $a,b\in\mathbb{R}$.

donc $\sin^4\theta=\frac{1}{2^4}\left[e^{i4\theta}-4e^{i3\theta}e^{-i\theta}+6e^{i2\theta}e^{-2i\theta}-4e^{i\theta}e^{-3i\theta}+e^{-4i\theta}\right]=\frac{1}{2^4}\left[e^{i4\theta}+e^{-4i\theta}-4\left(e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}\right)+6\right]$

$=\frac{1}{2^4}\left[2\cos 4\theta-4\times 2\cos 2\theta+6\right]=\frac{\cos 4\theta-4\cos 2\theta+3}{8}=\sin^4\theta$.

SUJET 2

Exercice 1 Développement de $\cos(4\theta)$ $\theta\in\mathbb{R}$.

On sait $\cos(4\theta)=\mathrm{Re}(e^{4i\theta})$. Et par la formule de Moivre $e^{i4\theta}=\left(e^{i\theta}\right)^4=(\cos\theta+i\sin\theta)^4$.

or, par la formule du binôme de Newton, $(a+b)^4=\sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}b^k a^{4-k}=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$, $a,b\in\mathbb{R}$.

donc $e^{i4\theta}=\cos^4\theta+4i\sin\theta\cos^3\theta+6i^2\sin^2\theta\cos^2\theta+4i^3\sin^3\theta\cos\theta+i^4\sin^4\theta$.

$=\sin^4\theta+\cos^4\theta-6\sin^2\theta\cos^2\theta+i\left(4\sin\theta\cos^3\theta-4\sin^3\theta\cos\theta\right)$.

donc $\cos(4\theta)=\mathrm{Re}(e^{i4\theta})=\sin^4\theta+\cos^4\theta-6\sin^2\theta\cos^2\theta$.

Exercice 2 Forme algébrique de $z=\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{20}$ avec $z_1=1+i\sqrt{3}$ et $z_2=1-i$

. On met z_1 et z_2 sous forme exponentielle :

- $|z_1|=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$ donc $z_1=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=2e^{i\pi/3}$.
- $|z_2|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$ donc $z_2=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\cos\frac{-\pi}{4}+i\sin\frac{-\pi}{4}=\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$.

. Ensuite $z=\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{20}=\left(\frac{2e^{i\pi/3}}{\sqrt{2}e^{-i\pi/4}}\right)^{20}=\sqrt{2}^{20}\left(e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)}\right)^{20}=2^{10}\left(e^{i\frac{7\pi}{12}}\right)^{20}=2^{10}e^{i\frac{7\times 20\pi}{12}}=2^{10}e^{i\frac{35\pi}{3}}=2^{10}e^{i10\pi}\times e^{i\frac{5\pi}{3}}=2^{10}\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

Ainsi $z=1024\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=512(1-i\sqrt{3})$.

Exercice 3 → Voir Exercice 2 sujet 1.

Exercice 4 On cherche les complexes Z tels que $Z^2=-2+i$.

Cherchons Z sous la forme $Z=x+iy$, $x,y\in\mathbb{R}$.

$$Z^2=-2+i \iff (S)\begin{cases}x^2-y^2=-2\\ x^2+y^2=|-2+i|=\sqrt{5}\\ 2xy=1\end{cases} \iff \begin{cases}2x^2=-2+\sqrt{5}\\ x^2-y^2=-2\\ xy=\frac{1}{2}\end{cases} \iff \begin{cases}x^2=\frac{\sqrt{5}-2}{2}\\ y^2=x^2+2=\frac{\sqrt{5}+2}{2}\\ xy>0\end{cases} \iff \begin{cases}x=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}}\\ y=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}}\\ x \text{ et } y \text{ ont m̂ signe}\end{cases}$$

donc les solutions du système (S) sont $\begin{cases}x=\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}}\\ y=\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}}\end{cases}$ et $\begin{cases}x=-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}}\\ y=-\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}}\end{cases}$

Ainsi, les 2 racines carrées de $z=-2+i$ sont $Z_1=\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}}$ et $Z_2=-Z_1$.