Feuille de T.D. 5 - Polynômes[1]

Dans toute la feuille, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1.

Exercice 1 Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) tels que

$$P(X^2) = (X^2+1)P(X).$$

Indication : on pourra commencer par chercher une condition nécessaire sur les degrés.

Exercice 2 Déterminer les fonctions polynômiales réelles non nulles solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$x^2(1+x)y'' + x(1-x)y' - y = 0.$$

Exercice 3 Soit $P = X^6 - X^4 + 2X^3 - X + 1$.

1. Effectuer la division euclidienne de P par $A = X^2 - 2X - 2$.
2. En déduire la valeur de $P(1+\sqrt{3})$.

Exercice 4 Calculer le reste de la division euclidienne de $P = (X-1)^{n+2} + X^{2n+1}$ par $X^2 - X + 1$.

Exercice 5 Calculer, pour a un réel quelconque, le reste de la division euclidienne de $P = (X\sin(a) + \cos(a))^n$ par (X^2+1).

Exercice 6 Déterminer un polynôme P de degré 7 tel que $(X-1)^4$ divise $P+1$ et $(X+1)^4$ divise $P-1$.
Indication : on pourra commencer par chercher la dérivée P' de P.

Exercice 7 Soit $P = 1 + \frac{X}{1!} + \frac{X^2}{2!} + \cdots + \frac{X^n}{n!}$. Montrer que P n'a que des racines simples.
Indication : on pourra raisonner par l'absurde, et calculer $P' - P$.

Exercice 8

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^5 = j$.
2. Soit $P = X^{10} + X^5 + 1$. Déterminer les racines de P dans $\mathbb{C}$.
3. En déduire la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 9 Soit $P = X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$.

1. Que vaut le polynôme $Q = (X-1)P$?
2. En déduire la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 10 Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $P = X^4 + X^2 + 4$.
Indication : on pourra commencer par factoriser P en produit de polynômes de degré 2 avec une méthode de type forme canonique.

Exercice 11 Soit $P = X^3 - 8X^2 + 23X - 28$.

1. On note x_1, x_2 et x_3 les racines de P dans $\mathbb{C}[X]$. Que vaut $x_1 + x_2 + x_3$?
2. On sait que la somme de 2 des racines de P est égale à la troisième. Déterminer les racines de P.

Exercice 12 A quelle condition le polynôme réel $X^3 + pX + q$ admet-il une racine double ? Calculer alors cette racine.
Indication : on pourra d'abord donner le nombre de racines distinctes du polynôme, puis déterminer un système satisfait par ces racines.

1. Enseignant responsable du CM : G. Chagny. Chargés de TD : G. Chagny, J. Lemoine, L. Loukitch.