Feuille de T.D. 3 - Logique, ensembles, applications, dénombrement [1]

Exercice 1 Donner la négation de chacune des assertions suivantes. Sont-elles vraies ou fausses ?

1. $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x+y>0.$
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x+y>0.$
3. $\exists a \in \mathbb{R},\ \forall b>0,\ |a|<b.$
4. $\forall b>0,\ \exists a \in \mathbb{R},\ |a|<b.$

Exercice 2 Soient f et g deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Nier chacune des assertions suivantes.
   (a) L'application f est croissante.
   (b) Il existe un réel négatif x tel que $f(x)>2$.
   (c) Il existe un réel x, tel que, quel que soit le nombre réel y, si $x<y$ alors $f(x)<f(y)$.
2. Exprimer à l'aide de quantifieurs, les assertions suivantes.
   (a) La fonction f est impaire.
   (b) La fonction f n'est pas la fonction nulle.
   (c) La fonction f ne prend jamais les mêmes valeurs en deux points distincts.
   (d) La fonction f est inférieure à g.

Exercice 3 Ecrire en langage mathématique les ensembles suivants :

1. l'ensemble des entiers naturels divisibles par 5.
2. l'ensemble des entiers qui sont la différence de deux entiers.
3. l'ensemble des fractions d'entiers dont le numérateur est une puissance de 3.

Exercice 4 Soient A et B deux parties d'un ensemble E.

1. Montrer que $A\cap B = A\cup B$ équivaut à $A=B$.
2. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

$$\text{(i)}\quad A\subset B,\qquad \text{(ii)}\quad A\cup B=B,\qquad \text{(iii)}\quad A^c\cup B=E.$$

Exercice 5 Soient A et B deux parties d'un ensemble E. On appelle *différence symétrique* de A et B notée $A\Delta B$, le sous-ensemble de E défini par

$$A\Delta B=\{x\in A\cup B \setminus x\notin A\cap B\}=(A\cup B)\backslash(A\cap B).$$

1. Montrer que $A\Delta B=(A\cap B^c)\cup(B\cap A^c)$.
2. Calculer $A\Delta A$, $A\Delta\emptyset$, $A\Delta E$, $A\Delta A^c$.
3. On note C un troisième sous-ensemble de E. Démontrer que

$$(A\Delta B)\cap C=(A\cap C)\Delta(B\cap C).$$
$$(A\Delta B)\cup C\supset(A\cup C)\Delta(B\cup C).$$

Exercice 6 Soit $f:\mathbb{Z}\to[-1;+\infty[$, définie par $f(x)=x^2$ si $x\le 0$, $f(x)=2x-1$ si $x>0$. L'application f est-elle injective, surjective, bijective ?

Exercice 7 Soient E,F et G trois ensembles, et deux applications $u:E\to F$ et $v:F\to G$. Montrer les implications suivantes.

1. Si u et v sont injectives, alors $v\circ u$ est injective.
2. Si u et v sont surjectives, alors $v\circ u$ est surjective.
3. Si $v\circ u$ est injective, alors u est injective.
4. Si $v\circ u$ est surjective, alors v est surjective.
5. Si $v\circ u$ est injective et u surjective, alors v est injective.

1. Enseignant responsable du CM : G. Chagny. Chargés de TD : G. Chagny, J. Lemoine, L. Loukitch.

Exercice 8 Soient E et F deux ensembles, et $f : E \to F$ une application.

1. Soient A et B deux parties de E.
   (a) Montrer que si $A \subset B$, alors $f(A) \subset f(B)$. L'inclusion réciproque est-elle vraie ?
   (b) Montrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. L'inclusion réciproque est-elle vraie ?
   (c) Montrer que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
2. Montrer que f est injective si et seulement si, pour toutes parties A et B de E, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Exercice 9 Etudier les propriétés (réflexivité, symétrie, antisymétrie, et transitivité) de chacune des relations $\mathcal{R}$ suivantes.

1. Sur l'ensemble des droites du plan, $\mathcal{R} = \perp$ (relation d'orthogonalité).
2. Sur $\mathcal{P}(E)$ (E un ensemble), $A\mathcal{R}B$ si et seulement si $A = B$ ou $A = B^c$.

Exercice 10 Sur $\mathbb{Z}$, on définit la relation $\sim$ par

$$n \sim m \iff n + m \text{ est pair.}$$

1. Montrer que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de 0 et celle de 1.
3. En déduire l'ensemble des classes d'équivalence de cette relation.

Exercice 11 Sur $\mathbb{C}$, on définit une relation $\mathcal{R}$ par

$$z\mathcal{R}z' \iff |z| = |z'|.$$

Montrer que la relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence, et déterminer la classe d'équivalence de tout complexe $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 12 Soit n un entier supérieur ou égal à 1, et p un entier tel que $1 \leq p \leq n$. Montrer les propriétés suivantes, à la fois par le raisonnement et le calcul.

1. $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.
2. $\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p+1} + \binom{n}{p}$ (Formule de Pascal).
3. $n\binom{n-1}{p-1} = p\binom{n}{p}$.

Exercice 13 Soient p, q deux entiers supérieurs ou égaux à 1, et n un entier tel que $n \leq p$, et $n \leq q$.

1. Montrer que $\binom{p+q}{n} = \sum_{j=0}^{n} \binom{p}{j}\binom{q}{n-j}$. *Indication :* On pourra faire un raisonnement purement combinatoire, ou bien développer de deux façons le produit $(1+x)^{p+q}$, $x \in \mathbb{R}$.
2. En déduire des expressions simples de $\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}^2$ et $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}^2$.

Exercice 14 On a 10 livres à ranger sur une étagère.

1. Combien y a-t-il de configurations possibles ?
2. Parmi les 10 livres, trois sont écrits par un même auteur. Combien y a-t-il de configurations dans lesquelles ces trois livres sont rangés à côté ?
3. Généraliser à n livres ($n \geq 1$), dont k livres du même auteur ($1 \leq k \leq n$).

Exercice 15 On tire 5 cartes dans un jeu de 32 cartes, sans remise.

1. Combien de mains possibles y a-t-il ?
2. Combien y a-t-il de mains contenant : (a) deux dames ? (b) au plus deux dames ? (c) deux cartes de même couleur ?

Exercice 16 On tire 5 lettres avec remise dans un alphabet comportant les 26 lettres.

1. Combien de mots sont-ils possibles ?
2. Combien y-a-t-il de mots comportant : (a) deux A ? (b) au moins trois A ? (c) deux voyelles et un Z ?