Feuille de T.D. 2 - Géométrie élémentaire de l'espace[1]

Pour tous les exercices de cette feuille, on se place dans l'espace muni d'un repère orthonormal direct $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Exercice 1 Soient $ABCD$ un tétraèdre, et G l'isobarycentre de ses sommets.

1. On rappelle qu'une médiane du tétraèdre est une droite joignant un sommet au centre de gravité de la face opposée. Montrer que les médianes du tétraèdre sont concourantes en G.
2. On appelle bimédiane du tétraèdre une droite joignant les milieux de deux arêtes opposées. Montrer que les bimédianes du tétraèdre sont aussi concourantes en G.

Exercice 2 Soit $ABCD$ un tétraèdre. On définit les points P, Q, R et S par

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}, \quad \overrightarrow{CR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}, \quad \overrightarrow{CS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}.$$

Soient I et J les milieux respectifs de $[AC]$ et $[BD]$.

1. Exprimer chacun des points P, Q, R, S, I et J comme barycentres de deux des sommets du tétraèdre.
2. En introduisant un barycentre bien choisi des sommets du tétraèdre, montrer que les droites (PS), (QR) et (IJ) sont concourantes.

Exercice 3 Soient $ABCD$ un tétraèdre, I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[CD]$. Pour tout réel m, on note G_m le barycentre de la famille de points pondérés $\{(A,1),(B,1),(C,m-2),(D,m)\}$.

1. Exprimer $\overrightarrow{IG_1}$ en fonction de $\overrightarrow{CD}$. Montrer que IG_1DJ est un parallélogramme.
2. Préciser l'ensemble E des valeurs pour lesquelles le barycentre G_m existe. On suppose dans la suite que le réel m appartient à l'ensemble E.
3. Démontrer que G_m appartient au plan (ICD).
4. Démontrer que le vecteur $m\overrightarrow{JG_m}$ est constant.
5. En déduire l'ensemble $\mathcal{F}$ des points G_m lorsque m décrit l'ensemble E.

Exercice 4 Déterminer une base orthonormale directe dont le premier vecteur est colinéaire au vecteur de coordonnées $(1,2,2)$.

Exercice 5 Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace non nuls. Montrer les formules du *double produit vectoriel* :

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w})\,\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\,\vec{u},$$
$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\,\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\,\vec{w}.$$

Indication : on pourra introduire la base orthonormée $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ construite de telle sorte que $\vec{i}'$ est colinéaire à $\vec{u}$ et tel que $\vec{j}'$ est orthogonal à $\vec{i}'$ et coplanaire à $\vec{v}$ et $\vec{i}'$. On pourra ensuite exprimer les coordonnées des trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ dans cette base.

Exercice 6 *(Division vectorielle)*
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace non nuls. On considère l'équation vectorielle d'inconnue $\vec{x}$ suivante : $\vec{u} \wedge \vec{x} = \vec{v}$.

1. Montrer que s'il existe une solution à cette équation, alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux. On les suppose orthogonaux dans la suite de l'exercice.

1. Enseignant responsable du CM : G. Chagny. Chargés de TD : G. Chagny, J. Lemoine, L. Loukitch.

2. Déterminer une solution $\vec{x}_0$ de l'équation colinéaire à $\vec{u} \wedge \vec{v}$.
3. En déduire toutes les solutions de l'équation.

Exercice 7 Former une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par le point $A(1,0,1)$ et dirigé par les vecteurs $\vec{u}(1,1,0)$ et $\vec{v} = (0,1,1)$.

Exercice 8
1. Former un système d'équations cartésiennes de la droite définie par la paramétrisation suivante :
$$\begin{cases} x &= 3t+2 \\ y &= 4t-2 \\ z &= 2t. \end{cases}$$
2. Déterminer des équations paramétriques de la droite définie par les équations cartésiennes suivantes :
$$\begin{cases} x+y-3z+1 &= 0 \\ 2x+y-5z &= 0. \end{cases}$$

Exercice 9 *(position relative de deux plans)*
1. On considère deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ d'équations cartésiennes respectives $ax+by+cz+d=0$ et $a'x+b'y+c'z=0$. On note $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ les vecteurs de coordonnées respectives (a,b,c) et (a',b',c'). Déterminer quelles peuvent être les positions des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ l'un par rapport à l'autre. Caractériser, à l'aide des vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ chacune de ces situations.
2. On considère maintenant les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ d'équations respectives $2x-4y+3z+5=0$ et $x-2y+3z-2=0$.
   (a) Vérifier qu'ils ne sont pas parallèles et donner une paramétrisation de leur intersection $\mathcal{D}$.
   (b) Donner une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}''$ passant par $A(2,-2,0)$ et perpendiculaire aux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.

Exercice 10 On considère les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ d'équations respectives
$$\begin{cases} x &= 2z+1 \\ y &= z-1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x &= z+2 \\ y &= 3z-3 \end{cases}$$
1. Donner un vecteur directeur ainsi que les coordonnées d'un point de chacune de ces deux droites.
2. Justifier que les droites sont coplanaires, et former une équation de leur plan.

Exercice 11 On considère les points $A(2/3,-3,2)$ et $B(-4/3,0,-4)$. On note I le milieu de $[AB]$ et $\mathcal{S}$ la sphère de diamètre $[AB]$.
1. Soit E le barycentre des points pondérés $(A,2)$ et $(B,1)$.
   (a) Calculer les coordonnées de E.
   (b) Montrer que l'ensemble $\mathcal{P}$ des points M de l'espace tels que $\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\| = 3\|\overrightarrow{MO}\|$ est le plan médiateur du segment $[OE]$ (c'est-à-dire l'ensemble des points situés à égale distance de O et E).
   (c) Montrer qu'une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est $y=-1$.
2. (a) Calculer le rayon de la sphère $\mathcal{S}$ et la distance du centre I de la sphère au plan $\mathcal{P}$. En déduire que l'intersection $\mathcal{C}$ du plan $\mathcal{P}$ et de la sphère $\mathcal{S}$ n'est pas vide.
   (b) Montrer qu'une équation de $\mathcal{C}$ dans le plan $\mathcal{P}$ est $(x+1/3)^2+(z+1)^2=12$. En déduire la nature de l'ensemble $\mathcal{C}$. Préciser ses caractéristiques.
3. Soit D le point de coordonnées $(-1/3,-1/2,4\sqrt{3}-1)$.
   (a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (ID).
   (b) En déduire que la droite (ID) et l'ensemble $\mathcal{C}$ sont sécants en un point noté F dont on donnera les coordonnées.