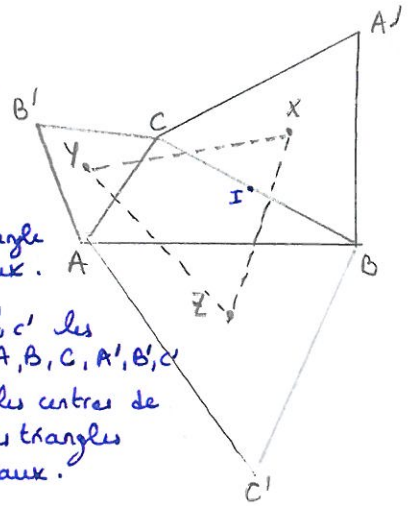
Correction de l'Exercice 15, Feuille de TD 1



hypothèses

- ABC triangle direct
- BA'C, CB'A et AC'B triangle équilatéraux.
- a, b, c, a', b', c' les affixes de A, B, C, A', B', C'
- X, Y et Z les centres de gravité des triangles équilatéraux.

1. le triangle $A'CB$ est équilatéral donc

$(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA'}) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ et $\|\overrightarrow{CB}\| = \|\overrightarrow{CA'}\|$ càd $\frac{\|\overrightarrow{CA'}\|}{\|\overrightarrow{CB}\|} = 1$

En terme d'affixe, cela signifie que le nombre complexe $\frac{a'-c}{b-c}$ a pour argument $\frac{\pi}{3}$ et pour module 1.

donc $\frac{a'-c}{b-c} = e^{i\pi/3} = -e^{4i\pi/3} = -(e^{2i\pi/3})^2 = -j^2$.

Ainsi $a' = (1+j^2)c - bj^2$. Or $1+j^2 = -j$ (voir Ex. 4)

donc $\boxed{a' = -jc - j^2 b}$.

2. Dans un triangle, le centre de gravité est situé aux $2/3 - 1/3$ de chaque médiane.

Ainsi, en notant I le milieu de $[BC]$, dans le triangle $BA'C$ on a $\overrightarrow{A'X} = \frac{2}{3}\overrightarrow{A'I}$.

D'où $\overrightarrow{A'X} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{BI})$ par la relation de Chasles.

or $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ car I est le milieu $[BC]$.

Donc on en déduit $\overrightarrow{A'X} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{A'B} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{A'B} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. Au niveau des affixes ceci se traduit par $x - a' = \frac{2}{3}(b-a') + \frac{1}{3}(c-b)$. Ce qui donne bien $\boxed{x = \frac{1}{3}a' + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c}$

3. Par la question 2, $x = \frac{1}{3}a' + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c$ donc, par 1, $x = \frac{1}{3}(-jc - j^2 b) + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c$.

Ce qui donne $\boxed{x = \frac{1}{3}[(1-j^2)b + (1-j)c]}$.

De la même façon, $y = \frac{1}{3}[(1-j^2)c + (1-j)a]$ et $z = \frac{1}{3}[(1-j^2)a + (1-j)b]$.

Donc $(z-x) + j^2(y-x) = \frac{1}{3}[(1-j^2)a + (j^2-j)b + (j-1)c + j^2\{(j-j^2)c + (1-j)a + (j^2-1)b\}]$

$= \frac{1}{3}[(1-j^2)a + (j^2-j)b + (j-1)c + (1-j)c + (j^2-1)a + (j-j^2)b] = 0$.

(en utilisant $j^3 = 1$, donc $j^4 = j$). Donc $\boxed{z - x = -j^2(y-x)}$.

4. On a donc $\frac{z-x}{y-x} = -j^2 = e^{i\pi/3}$ donc $(\overrightarrow{XZ}, \overrightarrow{XY}) = \frac{\pi}{3}$ et $\|\overrightarrow{XY}\| = \|\overrightarrow{XZ}\|$. Le triangle XYZ est donc équilatéral.

Correction de l'Exercice 3, Feuille de TD 1

$z = re^{i\theta}$ $z' = r'e^{i\theta'}$, $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ $r, r' \in \mathbb{R}_+^*$.

On raisonne par équivalence.

$|z+z'| = |z-z'| \iff |z+z'|^2 = |z-z'|^2$ car un module est toujours positif.

$\iff |z|^2 + |z'|^2 + 2\mathrm{Re}(z\bar{z'}) = |z|^2 + |z'|^2 - 2\mathrm{Re}(z\bar{z'})$

(écrire $z = x+iy$ et $z' = x'+iy'$ $x, y, x', y' \in \mathbb{R}$ pour le voir...)

$\iff 2\mathrm{Re}(z\bar{z'}) = -2\mathrm{Re}(z\bar{z'})$

$\iff \boxed{\mathrm{Re}(z\bar{z'}) = 0}$

or $z\bar{z'} = re^{i\theta} \times \overline{r'e^{i\theta'}} = re^{i\theta} \times r'e^{-i\theta'} = rr'e^{i(\theta-\theta')}$

$= rr'(\cos(\theta-\theta') + i\sin(\theta-\theta'))$

donc $\mathrm{Re}(z\bar{z'}) = rr'\cos(\theta-\theta')$.

Ainsi $\mathrm{Re}(z\bar{z'}) = 0 \iff rr'\cos(\theta-\theta') = 0$

$\iff \cos(\theta-\theta') = 0$

$\iff \theta - \theta' = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$

$\iff \boxed{\theta' = \theta + \frac{\pi}{2}\ [\pi]}$