Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45 rue des Saints-Pères 75006 Paris
2010-2011

Systèmes dynamiques - LICENCE L3

Feuille d'exercices n°1

Exercice 1 Qualifier les équations différentielles suivantes (linéarité, homogénéité, coefficients constants...). Dans tous les cas, distinguer les équations différentielles sous forme implicite de celles sous forme explicite, préciser l'ordre des équations et leur dimension. Ramener les équations d'ordre supérieur à 1 à des équations d'ordre 1.

$(a)\ y' - \frac{2}{t+1}y = (t+1)^2 \qquad (b)\ (t^2-1)\,y'' + ty' - y = 1$

$(c)\ \begin{cases} x' = x^2+3 \\ y' = 2\,x + z \\ z' = e^x \end{cases} \qquad (d)\ y'^2 + y' - ty = \cos t$

$(e)\ y' + 4y = e^t \qquad (f)\ y - ty' = \sqrt{t^2+y^2}$

$(g)\ t^2(1+t^2)y' - 2y = 8 \qquad (h)\ \begin{cases} x' = \sin(t)x + 3 \\ y' = x + 3y + e^t \end{cases}$

$(i)\ y' + ty = t^3y^3 \qquad (j)\ y'' + \cos(t)\,y' + 2y = t$

$(k)\ y' = \tan(t)y \qquad (l)\ \ln(\sqrt{y})y' + 4\cos(t)t^2 = 0$

Exercice 2 Parmi les équations différentielles de l'exercice précédent, résoudre les équations différentielles homogènes associées aux équations linéaires d'ordre 1 et de dimension 1.

Exercice 3 Résoudre les équations différentielles suivantes.

$$\text{(a)}\ \frac{y'}{y^2} = \frac{1}{x} \quad \text{(b)}\ \frac{y'}{y} = \frac{1}{x} \quad \text{(c)}\quad y' = \frac{1}{x}y \quad \text{(d)}\quad xy' = y.$$

Exercice 4 On considère l'équation différentielle $y' = \sqrt{y}$. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, pour quelles valeurs de t_0 et y_0 y a-t-il unicité locale d'une solution y vérifiant $y(t_0) = y_0$? Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $y(t) = \frac{1}{4}(t+a)^2$ est solution de l'équation. Sur quel domaine est-ce vrai ? En déduire toutes les solutions de cette équation.

Exercice 5 Résoudre les équations différentielles suivantes :

a)	$\frac{e^y-1}{e^y-2}y' = \frac{1}{t}$,	*b)*	$t\,(e^y-1)y' = e^y - 2$,
c)	$y' = y(1+y)$,	*d)*	$(2+t)y' = 2-y$,
e)	$t^3y' - t^2y = 1$,	*f)*	$ty' + y = \cos t$,
g)	$1 + ty' = e^y$,	*h)*	$y' = \lvert t-y\rvert$,
i)	$y' = \sqrt{\lvert y\rvert}$,	*j)*	$y - ty' = \sqrt{t^2+y^2}$,
k)	$ty' + y = ty^3$,	*l)*	$(1+t)y' + y = (1+t)\sin t$,
m)	$t^2(y'+y^2) = ty - 1$,	*n)*	$3ty' - 4y = t$,
o)	$y' + ty = t^3y^3$,	*p)*	$\lvert t\rvert y' + (t-1)y = t^2$,
q)	$y' - 2y + y^2 + 1 = 0$,	*r)*	$y' + y = \sin t$,
s)	$(1+t^2)y' = ty + t(1+t^2)$,	*t)*	$3y' = y\tan t + \frac{1}{y^2}$.

Exercice 6 Résoudre les équations suivantes

1. $(x^2 - y^2 - 1)y' = 2xy$ en posant $z = \frac{y}{x^2+y^2-1}$.
2. $yy' + y^2 = \exp(-2x)/2$ en posant un changement d'inconnue bien choisi.

Exercice 7 On considère l'équation différentielle $y' = y^2 - x$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ fixé : déterminer le lieu des points de coordonnées (x, y) pour lesquels les solutions de l'équation vérifient $y' = \lambda$? Une telle courbe est appelée courbe isocline. Tracer les courbes isoclines pour $\lambda = -2, -1, 0, 1, 2$, puis en déduire l'allure des trajectoires solutions de l'équation différentielle.