Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45 rue des Saints-Pères 75006 Paris
2011-2012 **LICENCE L3**

Probabilités 5

Feuille d'exercices n°2 : Vecteurs aléatoires à densité

Exercice 1 Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur l'intervalle $]0;2[$.

1. Déterminer la loi de $Z = X - Y$.
2. Déterminer la loi de $T = XY$.

Exercice 2 *(Partiel 2008)* Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires ayant pour densité

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \frac{1}{x}\mathbf{1}_{0<y\leq x\leq 1}.$$

1. Vérifier que f est bien une densité de probabilité.
2. Déterminer les lois marginales.
3. X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Déterminer la loi de $X + Y$.

Exercice 3 Soient L une variable aléatoire positive de densité f, et X une variable de loi uniforme sur $]0;1[$, indépendante de L. Soient aussi $L_1 = XL$ et $L_2 = (1-X)L$. Ces variables représentent par exemple la rupture aléatoire en deux morceaux de longueurs L_1 et L_2 d'une certaine molécule de longueur elle-même aléatoire L.

1. Déterminer la loi du couple (L_1, L_2).
2. Dans le cas particulier où f est définie par $f(x) = \lambda^2 x \exp(-x)\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)$, donner une densité de (L_1, L_2), de L_1 et L_2.
3. Donner la loi de la variable $Z = \min(L_1, L_2)$ (dans le cas général, et dans le cas particulier de la question précédente).

Exercice 4 Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires admettant pour densité la fonction f définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = k \exp\left\{-\left(x^2 - xy + \frac{y^2}{2}\right)\right\},$$

où k est une constante.

1. Déterminer la valeur de la constante k.
2. Déterminer les lois des variables X et Y. Sont-elles indépendantes ?

Exercice 5 Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; 0 < x \leq y\}$ et soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = e^{-y}\mathbf{1}_D(x,y).$$

1. Vérifier que f est la densité d'un couple (X, Y) de variables aléatoires réelles.
2. Quelles sont les lois de X et de Y ?

3. X et Y sont-elles indépendantes ? X et $Y - X$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 6 Soit (X, Y) un couple admettant pour densité

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2y^2}\,\mathbf{1}_{x\geq 1}\mathbf{1}_{y\geq 1}.$$

1. On définit les variables aléatoires $U = XY$ et $V = \dfrac{X}{Y}$. U et V sont-elles indépendantes ?
2. Calculer $\mathbb{E}(1/V\sqrt{U})$.

Exercice 7 *Loi Gamma, suite.* On rappelle que la densité de la loi Gamma $\gamma(p, \theta)$ de paramètres $p, \theta > 0$, est définie par

$$f_{p,\theta} : \ t \ \mapsto \ \frac{\theta^p}{\Gamma(p)} e^{-\theta t} t^{p-1} \mathbf{1}_{t>0}.$$

1. (*Loi Bêta de première espèce*)
   Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\gamma(p, \theta)$ et $\gamma(q, \theta)$ (avec $p, q, \theta > 0$). On note $S = X + Y$ et $T = X/(X + Y)$.
   (a) Déterminer la loi du couple (S, T).
   (b) En déduire que S et T sont indépendantes, que S suit une loi $\gamma(p + q, \theta)$ et que la loi de T admet pour densité la fonction g définie par

   $$\forall t \in \mathbb{R}, \ \ g(t) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} t^{p-1}(1-t)^{q-1}\mathbf{1}_{]0;1[}(t).$$

   On l'appelle loi Bêta de première espèce.
2. Soient $(Z_i)_{i=1,\ldots,n}$ des variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Déduire de la question précédente et de l'exercice de la première feuille de TD sur la Loi Gamma, que la variable $\sum_{i=1}^{n} Z_i^2$ suit une loi $\gamma(n/2, 1/2)$. On l'appelle loi du Chi-deux à n degré de liberté, notée $\chi^2(n)$.

Exercice 8 *(Partiel 2006)* Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{E}(1/2)$ et $\gamma(2, 2)$. On rappelle que la densité de la loi $\gamma(2, 2)$ est $g : y \mapsto 4y \exp(-2y)\mathbf{1}_{y>0}$.

1. Déterminer la loi du couple (U, V) où $U = X + Y$ et $V = X/(X + Y)$.
2. Trouver les lois de U et V.
3. Ces variables sont-elles indépendantes ?

Exercice 9 (*Examen 2010*) Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ \ f(x,y) = \frac{1}{2\pi(1 + x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^2$. *Indication :* penser aux coordonnées polaires.
2. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité f. Déterminer la loi du couple $\left(Y, \frac{X}{\sqrt{1+Y^2}}\right)$.
3. Les variables Y et $\frac{X}{\sqrt{1+Y^2}}$ sont-elles indépendantes ?